Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

9 Gennaio 2023

Primo Esercizio

Si consideri il moto unidimensionale di un punto di massa unitaria definito dall'equazione differenziale

$$\ddot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

con

$$f(x) = -4x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

i) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale $V(x)$ assumendo $V(0) = 0$.

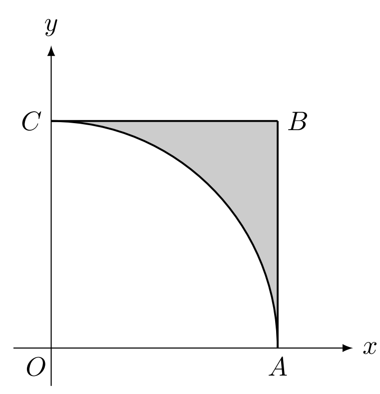
ii) Scrivere l'espressione dell'energia totale $E(x, \dot{x})$ e calcolare i valori dell'energia che corrispondono agli equilibri.

iii) Mostrare che per $E = 0$ ci sono solo due punti di inversione $x_{\min}$, $x_{\max}$, entrambi maggiori di -1.

iv) Tracciare il ritratto di fase.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri la lamina omogenea ABC di massa m definita come segue: dal quadrato $OABC$ di lato ℓ viene rimossa la regione corrispondente al quarto di cerchio OAC di raggio ℓ con centro in O (si veda la figura).



i) Determinare una terna principale di inerzia per la lamina ABC rispetto al polo O, motivando la risposta.

ii) Calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi della terna principale trovata al punto i).

Terzo Esercizio

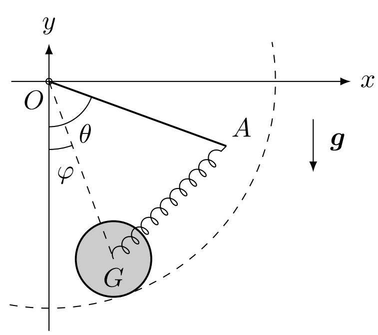
In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Un disco omogeneo di massa M e raggio r rotola senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio $R > r$ e centro in O. Inoltre, un'asta omogenea di massa m e lunghezza $R-r$ è vincolata in un suo estremo all'origine O attraverso una coppia rotoidale fissa. L'altro estremo dell'asta è collegato da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla al baricentro G del disco. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione uguale a g.
Usando come parametri lagrangiani gli angoli θ e φ formati rispettivamente dall'asta e dal segmento OG con l'asse verticale (si veda la figura),

i) scrivere le equazioni pure del moto del sistema usando il formalismo lagrangiano;

ii) ritrovare le equazioni pure del punto i) usando le equazioni cardinali della dinamica;

iii) determinare le configurazioni di equilibrio del sistema assumendo che

$$Mg = \frac{mg}{2} = k(R-r).$$



Esercizio 1

i) $V(x) = -\int f(x)\,dx$

$$V(x) = x^4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

ii) $E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$

equilibri

$V'(x) = 0$

$$f(x) = 0 \longrightarrow -4x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$$

$$\frac{2}{3}(2x - \sqrt{3}) - 2x^2(2x - \sqrt{3}) = 0$$

$$(2x - \sqrt{3})\left(\frac{2}{3} - 2x^2\right) = 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

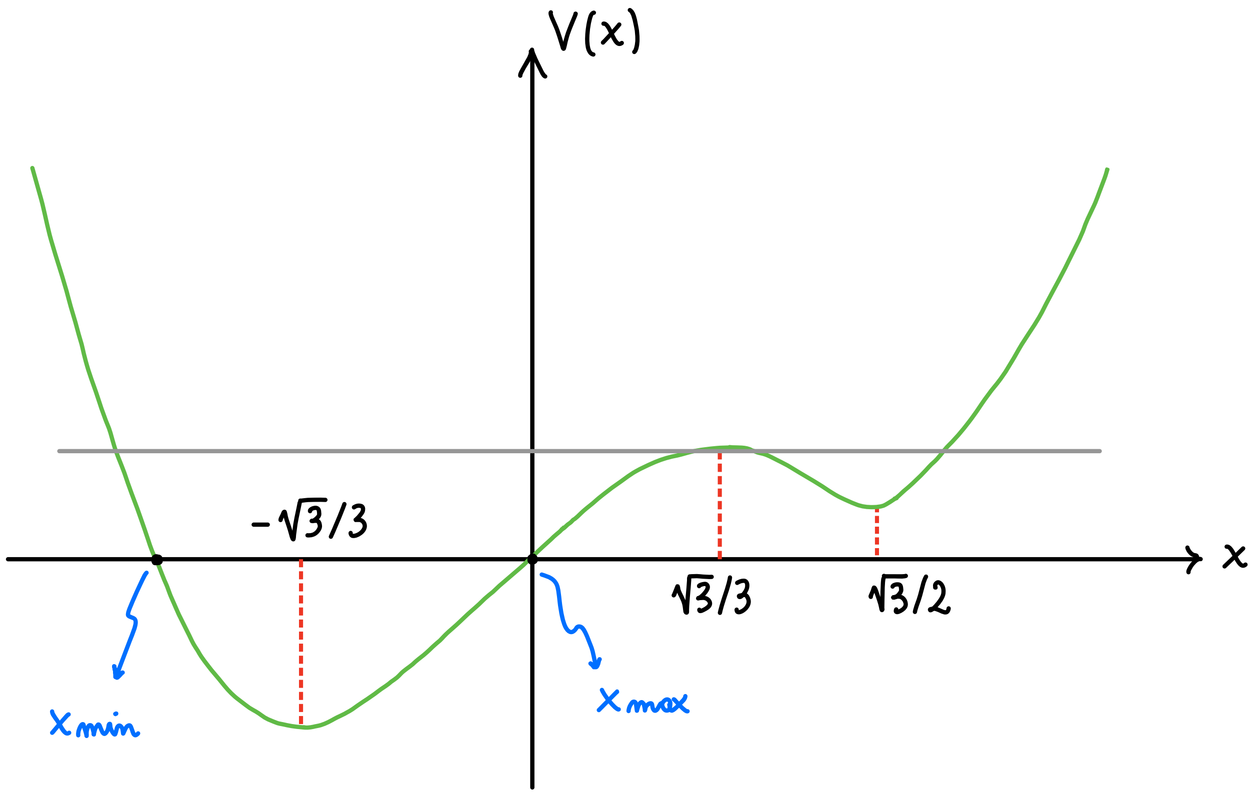
$$E(x_1, 0) = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{16}$$

$$E(x_2, 0) = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(x_3, 0) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{9}$$

iii) $V(x) = 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = +\infty$$

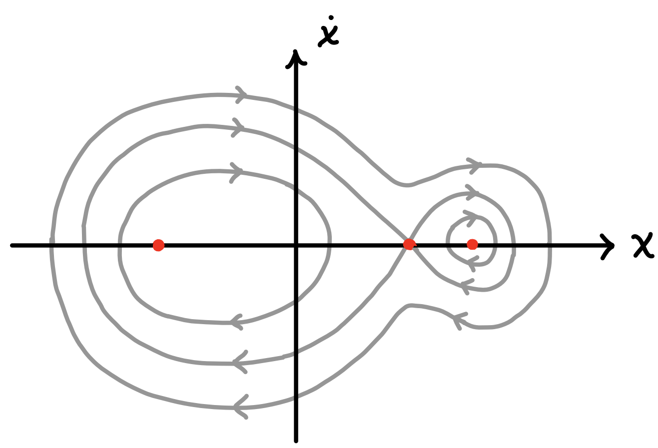


Noto che $V(x) > 0$ per $x > 0$ e $x < x_{min}$;

$V(-1) = \frac{1}{3} > 0$

Segue che $x_{min} > -1$, inoltre $x_{max} = 0 > -1$

iv) Ritratto di fase



Esercizio 2

i) Il piano perpendicolare alla lamina e passante per i punti O e B è di simmetria per riflessione per la lamina.
Segue che la bisettrice del 1° e 3° quadrante è un asse principale di inerzia.
Anche il piano su cui giace la lamina è un piano di simmetria per riflessione.
Segue che l'asse Oz è principale di inerzia.
Infine, la bisettrice del 2° e 4° quarto quadrante è un asse principale di inerzia.

ii) Calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'asse Oz

Lamina quadrata OABC

$$I_{Oz}^{q} = 2\, I_{Ox}^{q} = \frac{\sigma \ell^4}{3} \cdot 2$$

Quarto di disco

$$I_{Oz}^{d/4} = \frac{\sigma \pi \ell^4}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sigma \pi \ell^4}{8}$$

$$I_{Oz} = \sigma \ell^4 \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8} \right)$$

Calcoliamo il momento di inerzia rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, che chiamiamo Ox'

Lamina quadrata OABC

$$I^{q}_{Ox'} = \frac{\sigma \ell^4}{12}$$

Quarto di disco

$$I^{d/4}_{Ox'} = \sigma \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{0}^{\ell} \rho^3 \underbrace{\operatorname{sen}^2 \alpha}_{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \, d\rho \, d\alpha =$$

$$\frac{\sigma \ell^4}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \, d\alpha = \frac{\sigma \ell^4}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \left. \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} \right|_{-\pi/4}^{\pi/4} \right) =$$

$$\frac{\sigma \ell^4}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$\underline{I_{Ox'} = \frac{\sigma \ell^4}{4} \left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right)}$$

Chiamando Oy' il terzo asse principale si ha

$$\underline{I_{Oy'} = \frac{\sigma \ell^4}{8} \left(\frac{11}{3} - \frac{\pi}{2} \right)}$$

Poichè infine

$$\sigma = \frac{4m}{\ell^2(4-\pi)}$$

si ottiene

$$I_{Ox'} = \frac{m\ell^2}{4-\pi}\left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$I_{Oy'} = \frac{m\ell^2}{4-\pi}\left(\frac{11}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$I_{Oz} = \frac{m\ell^2}{4-\pi}\left(\frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Esercizio 3

i) $G - O = (R-r)(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{e}_1 - \cos\varphi\,\hat{e}_2)$

$$\vec{v}_G = (R-r)\,\dot{\varphi}\,(\cos\varphi\,\hat{e}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{e}_2)$$

velocità angolare dell'asta

$$\vec{\omega}^{(a)} = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$$

velocità angolare del disco

$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega}^{(d)} \times (P-G)$$

$$P - G = r\,(\operatorname{sen}\varphi\,\hat{e}_1 - \cos\varphi\,\hat{e}_2)$$

$$0 = (R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi + r\,\omega^{(d)}\cos\varphi$$

$$\omega^{(d)} = -\frac{R-r}{r}\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_3$$

Energia cinetica asta

$$T^{(a)} = \frac{1}{2} I_{O\hat{e}_3} |\vec{\omega}^{(a)}|^2 = \frac{1}{6} m\,(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

Energia cinetica disco

$$T^{(d)} = \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} I_{G\hat{e}_3} |\vec{\omega}^{(d)}|^2$$

$$= \frac{3}{4} M\,(R-r)^2\,\dot{\varphi}^2$$

Energia cinetica

$$T = \left(\frac{1}{6} m \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} M \dot{\varphi}^2 \right) (R-r)^2$$

Energia potenziale $\quad V = V_g + V_{el}$

$$V_g = -(R-r) g \left(M \cos\varphi + \frac{1}{2} m \cos\theta \right)$$

$$V_{el} = \frac{1}{2} k |A-G|^2 = k (R-r)^2 (2 - \cos(\varphi - \theta))$$

Lagrangiana

$$L = T - V$$

Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{3}{2} M (R-r) \ddot{\varphi} = -g M \operatorname{sen}\varphi - k (R-r) \operatorname{sen}(\varphi - \theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{m (R-r)}{3} \ddot{\theta} = -\frac{m g}{2} \operatorname{sen}\theta + k (R-r) \operatorname{sen}(\varphi - \theta)$$

ii) 2^a eq. cardinale asta rispetto ad O

$$\dot{\vec{M}}_0 = \vec{N}_0$$

$$\vec{M}_0 = I_{0\hat{e}_3} \vec{\omega}^{(a)} = \frac{m(R-r)^2}{3} \dot{\theta} \hat{e}_3$$

$$\vec{N}_0 = (B-O) \times (-mg\hat{e}_2) + (A-O) \times \vec{F}_{el}$$

$$B-O = \frac{R-r}{2}(\operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1 - \cos\theta\, \hat{e}_2)$$

$$A-O = 2(B-O)$$

$$\vec{F}_{el} = k(G-A)$$

$$\vec{N}_0 = -\frac{mg}{2}(R-r)\operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_3 + k(R-r)^2 \operatorname{sen}(\varphi-\theta)\, \hat{e}_3$$

proiettando lungo $\hat{e}_3$ si ha

$$\frac{m(R-r)}{3}\ddot{\theta} = -\frac{mg}{2}\operatorname{sen}\theta + k(R-r)\operatorname{sen}(\varphi-\theta)$$

2^a eq. cardinale disco rispetto a P

$$\dot{\vec{M}}_P = \vec{N}_P - M(\vec{v}_P \times \vec{v}_G)$$

ma $\vec{v}_P \parallel \vec{v}_G$

$$\longrightarrow \dot{\vec{M}}_P = \vec{N}_P$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_G + M(G-P)\times \vec{v}_G$$

con $\vec{M}_G = I_{G\hat{e}_3}\,\vec{\omega}^{(d)}$

$$\vec{M}_P = -\frac{3Mr}{2}(R-r)\dot{\varphi}\,\hat{e}_3$$

$$\vec{N}_P = (G-P)\times(-Mg\hat{e}_2 - \vec{F}_{el})$$

$$= Mgr\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{e}_3 + kr(R-r)\,\mathrm{sen}(\varphi-\theta)\,\hat{e}_3$$

proiettando lungo $\hat{e}_3$ si ha

$$\frac{3}{2}M(R-r)\ddot{\varphi} = -gM\,\mathrm{sen}\,\varphi - k(R-r)\,\mathrm{sen}(\varphi-\theta)$$

iii) $\quad Mg = \dfrac{mg}{2} = k(R-r)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}(\varphi-\theta) = 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}(\varphi-\theta) = 0 \end{cases}$$

segue che

$$\mathrm{sen}\,\varphi = -\,\mathrm{sen}\,\theta$$

1) $\quad \varphi = -\theta$

$$\mathrm{sen}(-\theta) + \mathrm{sen}(-2\theta) = 0$$

$$-\mathrm{sen}\,\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\underline{\theta = 0 , \quad \varphi = 0}$$

$$\underline{\theta = \pi , \quad \varphi = \pi}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\theta = \frac{2\pi}{3} , \quad \varphi = \frac{4\pi}{3}}$$

$$\underline{\theta = \frac{4\pi}{3} , \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}}$$

2) $\varphi = \pi + \theta$

$$\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(\pi + \theta - \theta) = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\underline{\theta = 0 , \quad \varphi = \pi}$$

$$\underline{\theta = \pi , \quad \varphi = 0}$$

Compito di Meccanica Razionale

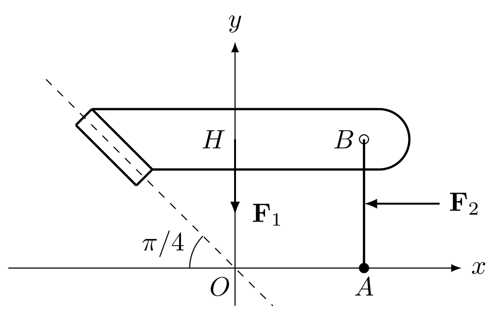
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

30 Gennaio 2023

Primo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Un corpo $\mathcal{C}$ è vincolato ad una guida rettilinea inclinata di $\pi/4$ rispetto all'asse Ox attraverso una coppia prismatica e all'estremo $B \equiv (\ell, \ell)$ di un'asta lunga ℓ da una coppia rotoidale mobile. L'altro estremo $A \equiv (\ell, 0)$ dell'asta è vincolato all'asse Ox tramite una coppia rotoidale fissa. Nel punto $H \equiv (0, \ell)$ di $\mathcal{C}$ è applicata la forza esterna attiva $\mathbf{F}_1 = (0, -F)$, mentre nel punto medio di AB è applicata la forza esterna attiva $\mathbf{F}_2 = (-F, 0)$, con $F > 0$.

Assumendo che i vincoli siano ideali determinare le reazioni vincolari che agiscono sul corpo $\mathcal{C}$ e sull'asta AB usando il principio di sovrapposizione degli effetti.



Secondo Esercizio

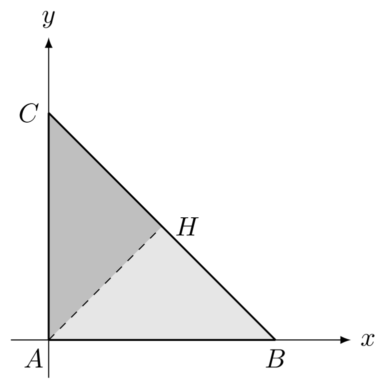
Si fissi un sistema di riferimento $Axyz$. Sul piano Axy si consideri una lamina triangolare ABC non omogenea di massa m con

$$B \equiv (\ell\sqrt{2}, 0), \qquad C \equiv (0, \ell\sqrt{2}).$$

Sia H il punto medio del segmento BC. La porzione triangolare AHC ha densità 2σ, mentre la porzione triangolare ABH ha densità σ (si veda la figura).

i) Calcolare la matrice di inerzia della lamina ABC rispetto al sistema di riferimento $Axyz$.

ii) Utilizzare il risultato del punto i) per calcolare il momento di inerzia della lamina ABC rispetto alla retta passante per i punti A e H.



Terzo Esercizio

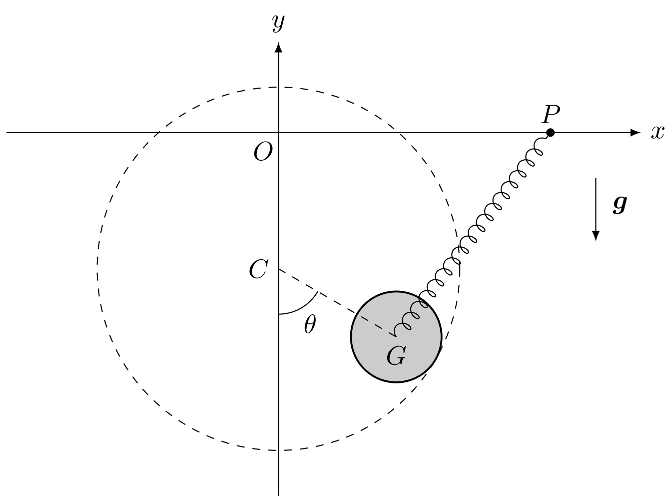
In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Un disco omogeneo di massa M e raggio r rotola senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio $R > r$ e centro in $C \equiv (0, -h)$, con $h = R - r$. Inoltre, un punto materiale P di massa m scivola sull'asse Ox. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega P con il baricentro G del disco. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.
Usando come parametri lagrangiani l'ascissa x di P e l'angolo θ formato dal segmento CG con l'asse verticale (si veda la figura),

i) determinare le configurazioni di equilibrio del sistema;

ii) studiare la stabilità degli equilibri trovati assumendo che

$$J = \frac{Mg}{kh} > 1;$$

iii) scrivere l'equazione secolare per una configurazione di equilibrio scelta a piacere tra quelle trovate.



ESERCIZIO 1

Consideriamo il sistema sollecitato solo da $\vec{F}_1$.

L'asta risulta scarica

$$\vec{\Phi}_A = -\vec{\Phi}_B^{\mathcal{C}-asta} \quad \text{ed entrambe hanno direzione verticale}$$

Deve essere $\vec{\Phi}_B^{asta-\mathcal{C}} \neq \vec{0}$ altrimenti $\mathcal{C}$ non può essere in equilibrio. Inoltre

$$\vec{\Phi}_B^{asta-\mathcal{C}} = F\hat{e}_2, \quad \text{infatti}$$

la risultante delle reazioni vincolari della coppia prismatica deve essere $= \vec{0}$; segue che un sistema di forze equivalente alle reazioni vincolari che agiscono su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica è dato da una coppia di momento $\vec{N}$.

Dalla 2° eq. c. per $\mathcal{C}$ segue che

$$\vec{N} = -F\ell\,\hat{e}_3$$

Quindi $\vec{\Phi}_B^{\mathcal{C}-asta} = -F\hat{e}_2$ e $\vec{\Phi}_A = F\hat{e}_2$

Consideriamo il sistema sollecitato solo da $\vec{F}_2$

Il corpo $\mathcal{C}$ risulta scarico. Questa volta la risultante $\vec{\Phi}$ delle reazioni vincolari della coppia prismatica deve essere $\neq \vec{0}$. Allora necessariamente la sua retta di applicazione deve passare per O e per B. Inoltre

$$\vec{\Phi} = -\vec{\Phi}'^{\,asta-\mathcal{C}}_B$$

1° eq. c. per l'asta

$$\Phi'_{Ax} - F + \Phi'^{\,\mathcal{C}-asta}_{Bx} = 0$$

$$\Phi'_{Ay} + \Phi'^{\,\mathcal{C}-asta}_{By} = 0$$

2° eq. c. per l'asta rispetto a B

$$\Phi'_{Ax}\ell - F\frac{\ell}{2} = 0 \longrightarrow \Phi'_{Ax} = \frac{F}{2}$$

perciò $\Phi'^{\,\mathcal{C}-asta}_{Bx} = \frac{F}{2}$, ma $\Phi'^{\,\mathcal{C}-asta}_{By} = \Phi'^{\,\mathcal{C}-asta}_{Bx} \longrightarrow \Phi'^{\,\mathcal{C}-asta}_{By} = \frac{F}{2}$

Infine $\Phi'_{Ay} = -\frac{F}{2}$

<u>Consideriamo il sistema sollecitato da $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$</u>

$$\underline{\vec{\Phi}_A^{TOT} = \left(\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right)}$$

$$\underline{\Phi_{B,TOT}^{asta-C} = \left(-\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right) = -\Phi_{B,TOT}^{C-asta}}$$

e per la coppia prismatica si ha

$\underline{\vec{N} = -Fl\,\hat{e}_3}$ e $\underline{\vec{\Phi} = \left(\frac{F}{2}, \frac{F}{2}\right)}$ applicata in un punto qualsiasi della retta per O e B

ESERCIZIO 2

i) Noto che AHC è un ottavo di un quadrato di lato 2ℓ e densità 2σ

$$I_{33}^{AHC} = \frac{1}{8}(2\sigma)(2\ell)^2\frac{(2\ell)^2}{6} = \frac{2}{3}\sigma\ell^4$$

$$I_{33}^{ABH} = \frac{1}{3}\sigma\ell^4$$

$$\underline{I_{33} = \sigma\ell^4}$$

Calcoliamo I_{11} e I_{22}

$$I_{11}^{ABH} = \frac{1}{2}(\sigma\ell^2)\frac{\ell^2}{12} = \frac{\sigma\ell^4}{24}$$

$$I_{11}^{AHC} = \frac{1}{2}(2\sigma\ell^2)\frac{\ell^2}{12} + (2\sigma)\frac{\ell^2}{2}\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \sigma\ell^4\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}\sigma\ell^4$$

$$\underline{I_{11} = \sigma\ell^4\left(\frac{1}{24}+\frac{7}{12}\right) = \frac{5}{8}\sigma\ell^4}$$

$$\underline{I_{22} = \sigma\ell^4\left(1-\frac{5}{8}\right) = \frac{3}{8}\sigma\ell^4}$$

Calcoliamo I_{12}

Noto che $I_{12}^{ABH} = \frac{1}{2}\tilde{I}_{12}^{ABC}$ dove $\tilde{I}_{12}^{ABC}$ si riferisce alla lamina ABC assumendo che abbia densità σ

$$I_{12}^{AHC} = 2I_{12}^{ABH}$$

$$\rightarrow \quad I_{12} = \frac{3}{2}\tilde{I}_{12}^{ABC}$$

$$\tilde{I}_{12}^{ABC} = -\sigma\int_0^{\ell\sqrt{2}}\int_0^{-x+\ell\sqrt{2}} xy\,dx\,dy = -\frac{\sigma}{2}\int_0^{\ell\sqrt{2}} x(x^2-2\sqrt{2}\ell x+2\ell^2)\,dx$$

$$= -\frac{\sigma}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\ell x^3+\ell^2x^2\right)\Bigg|_0^{\ell\sqrt{2}} = -\frac{\sigma\ell^4}{6}$$

$$\underline{I_{12} = -\frac{\sigma l^4}{4}}$$

Noto che $\sigma = \dfrac{2m}{3l^2}$

$$\underline{I_A = m l^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

ii) $\hat{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0)^T$

$$\underline{I_{AH}} = \hat{u} \cdot I_A \hat{u} = \underline{\frac{m l^2}{6}}$$

ES. 3

i) Configurazioni di equilibrio

$$V(x,\theta) = Mg(-h - h\cos\theta) + \frac{1}{2}k\left[(x - h\,\text{sen}\,\theta)^2 + (h + h\cos\theta)^2\right]$$

$$V(x,\theta) = -Mgh\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(x^2 - 2xh\,\text{sen}\,\theta + 2h^2\cos\theta\right) + \text{costante}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(x - h\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = Mgh\,\text{sen}\,\theta - kxh\cos\theta - kh^2\,\text{sen}\,\theta$$

$$\begin{cases} k(x - h\,\text{sen}\,\theta) = 0 \\ Mgh\,\text{sen}\,\theta - kxh\cos\theta - kh^2\,\text{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$$

$$x = h\,\text{sen}\,\theta$$

$$Mg\,\text{sen}\,\theta - kh\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - kh\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\text{sen}\,\theta\,(Mg - kh - kh\cos\theta) = 0$$

$$\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\underline{\theta_1 = 0} \qquad \underline{\theta_2 = \pi}$$

$$\underline{x_1 = 0} \qquad \underline{x_2 = 0}$$

$$\cos\theta = \frac{Mg}{kh} - 1 = \zeta - 1$$

Se $0 < \zeta < 2$ abbiamo altre due configurazioni di equilibrio

$$\underline{\theta_3 = \arccos(\zeta - 1)} \qquad \underline{\theta_4 = -\arccos(\zeta - 1)}$$

$$x_3 = h\,\text{sen}\,\theta_3 \qquad x_4 = h\,\text{sen}\,\theta_4$$

$$\text{sen}\,\theta_3 = \sqrt{\underbrace{1 - \cos^2\theta_3}_{\shortparallel}} \qquad \text{sen}\,\theta_4 = -\sqrt{\underbrace{1 - \cos^2\theta_4}}$$

$$1 - (\zeta - 1)^2 = \zeta(2 - \zeta) =$$

$$\underline{x_3 = h\sqrt{\zeta(2-\zeta)}} \qquad \underline{x_4 = -h\sqrt{\zeta(2-\zeta)}}$$

ii) Stabilità assumendo

$$\gamma > 1$$

$$V''(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} = -kh\cos\vartheta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = Mgh\cos\vartheta + kxh\,\mathrm{sen}\,\vartheta - kh^2\cos\vartheta$$

$$(x_1, \vartheta_1) = (0,0)$$

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} k & -kh \\ -kh & Mgh - kh^2 \end{pmatrix}$$

$$\det V''(0,0) = Mgkh - k^2h^2 - k^2h^2 = k^2h^2(\gamma - 2)$$

se $\underline{1 < \gamma < 2}$ allora (x_1, ϑ_1) è <u>instabile</u>

se $\underline{\gamma > 2}$ allora $\det V''(0,0) > 0$ e

$\mathrm{tr}\, V''(0,0) = k + kh^2(\gamma - 1) > 0$

per Lagrange - Dirichlet (x_1, ϑ_1) è <u>stabile</u>

$$(x_2, \vartheta_2) = (0, \pi)$$

$$V''(0,\pi) = \begin{pmatrix} k & kh \\ kh & -Mgh + kh^2 \end{pmatrix}$$

$$\det V''(0,\pi) = -Mgkh + k^2h^2 - k^2h^2 < 0$$

(x_2, ϑ_2) è <u>instabile</u>

(x_3, θ_3) e (x_4, θ_4)

noto che

$$\cos\theta_3 = \cos\theta_4 = \varsigma - 1$$

$$h\, x_3 \operatorname{sen}\theta_3 = h\, x_4 \operatorname{sen}\theta_4 = h^2 \operatorname{sen}^2\theta_3 = h^2 \operatorname{sen}^2\theta_4 = h^2 \varsigma(2-\varsigma)$$

$$V''(x_3,\theta_3) = V''(x\ ,\theta_4) = \begin{pmatrix} k & -kh(\varsigma-1) \\ -kh(\varsigma-1) & \underbrace{\overbrace{Mgh}^{= kh^2\varsigma}(\varsigma-1) + kh^2\varsigma(2-\varsigma) - kh^2(\varsigma-1)}_{\substack{\parallel \\ kh^2(\cancel{\varsigma^2} - \cancel{\varsigma} + \cancel{2\varsigma} - \cancel{\varsigma^2} - \cancel{\varsigma} + 1)}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & -kh(\varsigma-1) \\ -kh(\varsigma-1) & kh^2 \end{pmatrix}$$

$$\det V''(x_3,\theta_3) = \det V''(x_4,\theta_4) = k^2h^2(\cancel{1} - \varsigma^2 - \cancel{1} + 2\varsigma) = k^2h^2\varsigma(2-\varsigma) > 0$$

$$\operatorname{tr} V''(x_3,\theta_3) = \operatorname{tr} V''(x_4,\theta_4) = k(1+h^2) > 0$$

per Lagrange - Dirichlet, (x_3,θ_3) e (x_4,θ_4) quando esistono sono <u>stabili</u>

iii) Equazione secolare per una c. di e. scelta a piacere

$$T = T_P + T^{disco}$$

$$T_P = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T^{disco} = \frac{1}{2} M \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}\, \omega^2$$

$$\left(\|\vec{v}_G\|^2 = h^2\dot\theta^2 \ , \quad I_{Gz} = \frac{Mr^2}{2} \ , \quad \omega = ? \right)$$

sia Q il punto di contatto disco - guida

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_G + \omega \hat{e}_3 \times (Q - G)$$

$$\vec{v}_G = (\dot\theta h \cos\theta)\,\hat{e}_1 + (\dot\theta h \operatorname{sen}\theta)\,\hat{e}_2$$

$$Q - G = (r \operatorname{sen}\theta)\,\hat{e}_1 - (r\cos\theta)\,\hat{e}_2$$

allora

$$0 = h\dot{\theta}\cos\theta + r\omega\cos\theta$$

$$\omega = -\frac{h}{r}\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}Mh^2\dot{\theta}^2 + \frac{Mr^2}{4}\frac{h^2}{r^2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{3}{4}Mh^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

la matrice cinetica diventa

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}Mh^2 \end{pmatrix}$$

Scelgo come c. di e. $(x_1, \theta_1) = (0,0)$ con $\delta > 2$, l'equazione secolare è

$$\det\left(V''(0,0) - \lambda A\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} k - \lambda m & -kh \\ -kh & Mgh - kh^2 - \lambda\frac{3}{2}Mh^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{(k - \lambda m)\left(Mgh - kh^2 - \lambda\frac{3}{2}Mh^2\right) - k^2h^2 = 0}$$

Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

13 Febbraio 2023

Primo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Un corpo $\mathcal{C}$ è vincolato all'asse Oy attraverso una coppia prismatica e all'estremo $A \equiv (\ell, \ell)$ di un'asta AB attraverso una coppia rotoidale mobile. L'altro estremo dell'asta, $B \equiv (2\ell, 0)$, è vincolato all'asse Ox attraverso una coppia rotoidale fissa. Nel punto $H \equiv (\ell/2, \ell)$ di $\mathcal{C}$ è applicata la forza esterna attiva $\mathbf{F}_1 = (0, -F)$, $F > 0$, e nei punti P e Q dell'asta (diversi dagli estremi) sono applicate le forze esterne attive $\mathbf{F} = (F, F)$ e $-\mathbf{F}$, rispettivamente. Sia

$$\overline{PQ} = \alpha\ell, \qquad 0 < \alpha < \sqrt{2},$$

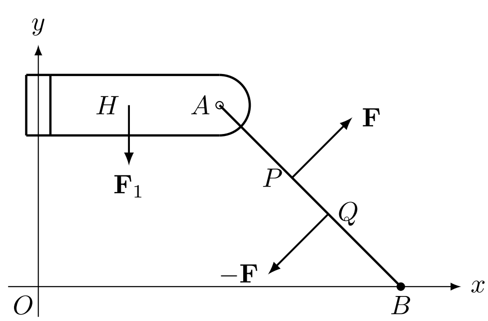
dove $\overline{PQ}$ indica la distanza tra P e Q.

Assumendo che i vincoli siano ideali,

i) determinare il valore di α tale che la reazione che $\mathcal{C}$ esercita sull'asta in A abbia componente nulla lungo l'asse Ox;

ii) determinare le reazioni vincolari esterne ed interne al sistema per il valore di α trovato al punto i) e per $\alpha = 1/2$;

iii) ritrovare la reazione vincolare che agisce in B per il valore di α trovato al punto i) con il principio dei lavori virtuali.

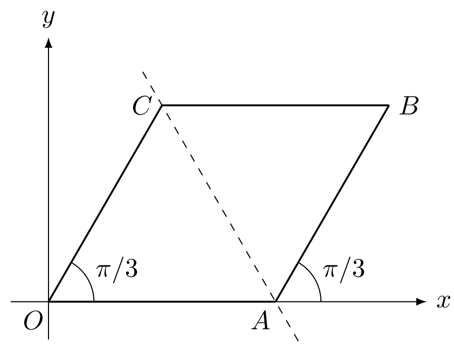


Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri il corpo rigido $OABC$ costituito da quattro aste uguali saldate in corrispondenza dei loro vertici in modo da formare il bordo di un parallelogramma. In particolare, l'asta OA giace sull'asse Ox e le direzioni definite dalle aste CO, AB sono inclinate di $\pi/3$ rispetto all'asse Ox (si veda la figura). Ciascuna asta è omogenea di lunghezza ℓ e massa m.

i) Calcolare la matrice di inerzia del corpo rigido $OABC$ rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$.

ii) Calcolare il momento di inerzia del corpo rigido $OABC$ rispetto alla retta passante per i punti A e C.



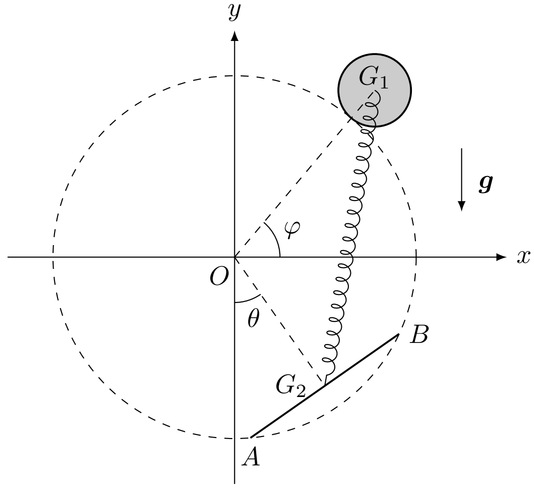
Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Un disco omogeneo di massa M e raggio r rotola senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio $R > r$ e centro in O. Inoltre, è presente un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza R i cui estremi possono scivolare lungo la guida. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro G_1 del disco con il baricentro G_2 dell'asta. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.
Usando come parametri lagrangiani l'angolo φ che il segmento G_1O forma con l'asse Ox e l'angolo θ che il segmento G_2O forma con l'asse Oy (si veda la figura),

i) scrivere le equazioni pure del moto con le equazioni cardinali della dinamica;

ii) determinare le configurazioni di equilibrio del sistema assumendo che

$$\frac{\sqrt{3}}{2} mR = M(R + r).$$



Soluzione primo esercizio

i)
Scriviamo la seconda equazione cardinale per l'asta rispetto al polo B:

$$-\sqrt{2}F\alpha\ell - \Phi_{A,x}\ell - \Phi_{A,y}\ell = 0. \tag{1}$$

Scriviamo la prima equazione cardinale per l'asta:

$$\Phi_{A,x} + \Phi_{B,x} = 0, \tag{2}$$

$$\Phi_{A,y} + \Phi_{B,y} = 0. \tag{3}$$

Dalla prima equazione cardinale per $\mathcal{C}$ proiettata lungo Oy si ottiene

$$\Phi_{A,y} = -F.$$

Sostituendo in (1) si ha

$$-\sqrt{2}F\alpha\ell - \Phi_{A,x}\ell + F\ell = 0$$

e dunque

$$\Phi_{A,x} = F - \sqrt{2}F\alpha, \tag{4}$$

da cui si vede che $\Phi_{A,x} = 0$ se e solo se

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ii)
Consideriamo il caso $\alpha = \sqrt{2}/2$. Abbiamo visto che $\Phi_{A,x} = 0$, $\Phi_{A,y} = -F$. Quindi da (2), (3) segue che $\Phi_{B,x} = 0$, $\Phi_{B,y} = F$. Inoltre, poiché $-\Phi_{A,x} = 0$, necessariamente la risultante del sistema delle reazioni vincolari esercitate dalla guida Oy su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica sarà nulla. Allora tale sistema è equivalente ad una coppia il cui momento N_{cp} lungo l'asse Oz si può trovare dalla seconda equazione cardinale per $\mathcal{C}$ rispetto ad A:

$$N_{cp} = -\frac{F\ell}{2}.$$

In definitiva per $\alpha = \sqrt{2}/2$ si ha

$$\mathbf{\Phi}_B = (0, F, 0), \quad \mathbf{\Phi}_A = (0, -F, 0), \quad \mathbf{N}_{cp} = \left(0, 0, -\frac{F\ell}{2}\right).$$

Consideriamo il caso $\alpha = 1/2$. Continua a valere $\Phi_{A,y} = -F$. Ponendo $\alpha = 1/2$ in (4) si ha $\Phi_{A,x} = F\left(1 - \sqrt{2}/2\right)$. Quindi da (2), (3) si ottiene $\Phi_{B,x} = F\left(\sqrt{2}/2 - 1\right)$, $\Phi_{B,y} = F$. Chiamiamo $\mathbf{\Phi}$ la risultante del sistema delle reazioni vincolari esercitate dalla guida Oy su $\mathcal{C}$ attraverso la coppia prismatica. Dalla prima equazione cardinale per $\mathcal{C}$ si trova $\Phi_x = F\left(1 - \sqrt{2}/2\right)$. In definitiva per $\alpha = 1/2$ si ha

$$\mathbf{\Phi}_B = \left(\frac{F}{2}(\sqrt{2} - 2), F, 0\right), \quad \mathbf{\Phi}_A = \left(\frac{F}{2}(2 - \sqrt{2}), -F, 0\right)$$

e

$$\mathbf{\Phi} = \left(\frac{F}{2}(2 - \sqrt{2}), 0, 0\right).$$

La retta di applicazione di $\mathbf{\Phi}$ è data da

$$y = \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\ell.$$

iii)
Svincoliamo l'estremo B rendendolo un estremo libero. Siano s l'ordinata di A e θ l'angolo tra l'asta AB e l'asse Oy. Applichiamo il principio dei lavori virtuali all'intero sistema considerando $\mathbf{\Phi}_B$ una forza esterna attiva:

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_H + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega} dt + \mathbf{\Phi}_B \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_B = 0, \tag{5}$$

dove

$$\boldsymbol{\chi}_H = \left(\frac{\ell}{2}, s, 0\right), \quad \boldsymbol{\chi}_B = (\ell + \sqrt{2}\ell \sin\theta, s - \sqrt{2}\ell\cos\theta, 0)$$

e

$$\mathbf{N} = (0, 0, -F\ell), \quad \boldsymbol{\omega} dt = (0, 0, \delta\theta).$$

Troviamo subito

$$\delta\boldsymbol{\chi}_H = (0, \delta s, 0), \quad \delta\boldsymbol{\chi}_B = (\delta\theta\sqrt{2}\ell\cos\theta, \delta s + \delta\theta\sqrt{2}\ell\sin\theta, 0).$$

Da (5) si ha

$$-F\delta s - F\ell\delta\theta + \Phi_{B,x}\delta\theta\sqrt{2}\ell\cos\theta + \Phi_{B,y}(\delta s + \delta\theta\sqrt{2}\ell\sin\theta) = 0,$$

che può essere riscritta come segue

$$\delta s(-F + \Phi_{B,y}) + \delta\theta(-F\ell + \Phi_{B,x}\sqrt{2}\ell\cos\theta + \Phi_{B,y}\sqrt{2}\ell\sin\theta) = 0.$$

Ora poniamo $\theta = \pi/4$ e imponiamo che la relazione precedente valga per ogni coppia di spostamenti virtuali $(\delta s, \delta\theta)$. Si ottiene

$$\begin{aligned} -F + \Phi_{B,y} &= 0, \\ -F\ell + \Phi_{B,x}\ell + \Phi_{B,y}\ell &= 0. \end{aligned}$$

In definitiva si trova

$$\mathbf{\Phi}_B = (0, F, 0).$$

Soluzione secondo esercizio

i)
Momento di inerzia rispetto all'asse Ox:

$$I_x^{OA} = 0,$$

$$I_x^{BC} = m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 = \frac{3}{4}m\ell^2,$$

$$I_x^{CO} = \frac{m}{\ell}\int_0^\ell \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2 ds = \frac{1}{4}m\ell^2,$$

$$I_x^{AB} = I_x^{CO},$$

$$I_x = I_x^{OA} + I_x^{AB} + I_x^{BC} + I_x^{CO} = \frac{5}{4}m\ell^2.$$

Momento di inerzia rispetto all'asse Oy:

$$I_y^{OA} = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m\ell^2,$$

$$I_y^{BC} = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\ell^2 = \frac{13}{12}m\ell^2,$$

$$I_y^{CO} = \frac{m}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\left(\frac{s}{2}\right)^2 ds + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{1}{48}m\ell^2 + \frac{1}{16}m\ell^2 = \frac{1}{12}m\ell^2,$$

$$I_y^{AB} = \frac{1}{48}m\ell^2 + m\left(\frac{5}{4}\ell\right)^2 = \frac{19}{12}m\ell^2,$$

$$I_y = I_y^{OA} + I_y^{AB} + I_y^{BC} + I_y^{CO} = \frac{37}{12}m\ell^2.$$

Momento di inerzia rispetto all'asse Oz:

$$I_z = I_x + I_y = \frac{13}{3}m\ell^2.$$

Momento di inerzia centrifugo rispetto all'asse Ox:

$$I_{xy}^{OA} = 0,$$

$$I_{xy}^{BC} = -\frac{m}{\ell}\int_0^\ell \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\left(s+\frac{\ell}{2}\right)ds = -\frac{\sqrt{3}}{2}m\ell^2,$$

$$I_{xy}^{CO} = -\frac{m}{\ell}\int_0^\ell \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)\left(\frac{s}{2}\right)ds = -\frac{\sqrt{3}}{12}m\ell^2,$$

$$I_{xy}^{AB} = -\frac{m}{\ell}\int_0^\ell \frac{\sqrt{3}}{2}s\left(\frac{s}{2}+\ell\right)ds = -\frac{\sqrt{3}}{3}m\ell^2,$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{OA} + I_{xy}^{AB} + I_{xy}^{BC} + I_{xy}^{CO} = -\frac{11\sqrt{3}}{12}m\ell^2.$$

Matrice di inerzia rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$:

$$I_O = \frac{m\ell^2}{12}\begin{bmatrix} 15 & -11\sqrt{3} & 0 \\ -11\sqrt{3} & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 52 \end{bmatrix}.$$

ii)
Si può vedere che

$$I_r = 4I_x^{CO} = m\ell^2.$$

Soluzione terzo esercizio

i)
Introduciamo l'asse Oz perpendicolare al piano Oxy e orientato in modo tale che il sistema di riferimento $Oxyz$ sia levogiro.
Scriviamo le coordinate di G_1, G_2 e del punto di contatto P tra il disco e la guida:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{G_1} &= (R+r)(\cos\varphi,\, \sin\varphi,\, 0)^T,\\ \mathbf{x}_{G_2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}R\,(\sin\theta,\, -\cos\theta,\, 0)^T,\\ \mathbf{x}_P &= R\,(\cos\varphi,\, \sin\varphi,\, 0)^T.\end{aligned}$$

Le rispettive velocità sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{G_1} &= \dot\varphi(R+r)(-\sin\varphi,\, \cos\varphi,\, 0)^T,\\ \mathbf{v}_{G_2} &= \dot\theta\frac{\sqrt{3}}{2}R\,(\cos\theta,\, \sin\theta,\, 0)^T,\\ \mathbf{v}_P &= \dot\varphi R\,(-\sin\varphi,\, \cos\varphi,\, 0)^T.\end{aligned}$$

Notando che la velocità di P come punto solidale al disco è nulla, la velocità angolare del disco risulta

$$\boldsymbol{\omega}_d = \frac{R+r}{r}\dot\varphi\,(0,\, 0,\, 1)^T.$$

La velocità angolare dell'asta invece è

$$\boldsymbol{\omega}_a = \dot\theta\,(0,\, 0,\, 1)^T.$$

La seconda equazione cardinale per il disco rispetto al polo P è

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P - M\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_{G_1} = \mathbf{N}_P. \tag{6}$$

Abbiamo

$$\mathbf{M}_P = I_{Pz}\,\boldsymbol{\omega}_d = -\frac{3}{2}Mr(R+r)\dot\varphi\,(0,\, 0,\, 1)^T,$$

dove I_{Pz} è il momento di inerzia del disco rispetto ad un asse passante per P e parallelo ad Oz. Inoltre

$$\mathbf{N}_P = (\mathbf{x}_{G_1} - \mathbf{x}_P) \times \left[M\mathbf{g} + k(\mathbf{x}_{G_2} - \mathbf{x}_{G_1})\right],$$

dove $\mathbf{g} = (0,\, 0,\, -g)^T$. Dopo aver proiettato (6) lungo Oz e diviso per r risulta

$$\frac{3}{2}M(R+r)\ddot\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}kR\cos(\theta-\varphi) - Mg\cos\varphi. \tag{7}$$

La seconda equazione cardinale per l'asta rispetto al polo O è

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O - M\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_{G_1} = \mathbf{N}_O. \tag{8}$$

Abbiamo

$$\mathbf{M}_O = I_{Oz}\,\boldsymbol{\omega}_a = \frac{5}{6}mR^2\dot\theta\,(0,\, 0,\, 1)^T,$$

dove I_{Oz} è il momento di inerzia dell'asta rispetto ad un asse passante per O e parallelo ad Oz. Inoltre

$$\mathbf{N}_O = \mathbf{x}_{G_2} \times \left[m\mathbf{g} - k(\mathbf{x}_{G_2} - \mathbf{x}_{G_1})\right].$$

Dopo aver proiettato (8) lungo Oz e diviso per R risulta

$$\frac{5}{6}mR\ddot{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[k(R+r)\cos(\theta-\varphi) - mg\sin\theta\right]. \tag{9}$$

Le due equazioni pure cercate sono (7) e (9).

ii)

L'energia potenziale delle forze attive applicate al sistema porge (a meno di termini additivi costanti)

$$V(\theta,\varphi) = Mg(R+r)\sin\varphi - mg\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}kR(R+r)\sin(\varphi-\theta),$$

che usando l'ipotesi può essere scritta come

$$V(\theta,\varphi) = Mg(R+r)(\sin\varphi - \cos\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2}kR(R+r)\sin(\varphi-\theta).$$

Ponendo

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$$

si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} Mg\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}kR\cos(\varphi-\theta) &= 0, \\ Mg\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}kR\cos(\varphi-\theta) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Sommando queste due equazioni si ha

$$\sin\theta = -\cos\varphi,$$

che ha come soluzioni

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta, \qquad \varphi = \frac{3\pi}{2} - \theta.$$

Sostituendo $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$ in (10) risulta

$$\sin\theta = 0.$$

Perciò troviamo le configurazioni di equilibrio

$$(\theta_1,\varphi_1) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (\theta_2,\varphi_2) = \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Sostituendo $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \theta$ in (10) risulta

$$\sin\theta\left(Mg + \sqrt{3}kR\cos\theta\right) = 0.$$

Perciò troviamo le configurazioni di equilibrio

$$(\theta_3,\varphi_3) = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right), \quad (\theta_4,\varphi_4) = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$$

e se $J = Mg/(\sqrt{3}kR) < 1$ le due configurazioni di equilibrio

$$(\theta_5,\varphi_5) = \left(\arccos(-J), \frac{3\pi}{2} - \theta_5\right), \quad (\theta_6,\varphi_6) = \left(2\pi - \theta_5, \frac{3\pi}{2} - \theta_6\right).$$

Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

24 aprile 2023

Primo Esercizio

Un punto materiale di massa unitaria si muove in un campo di forze centrali

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho, \qquad f(\rho) = 4\rho^3 - \alpha,$$

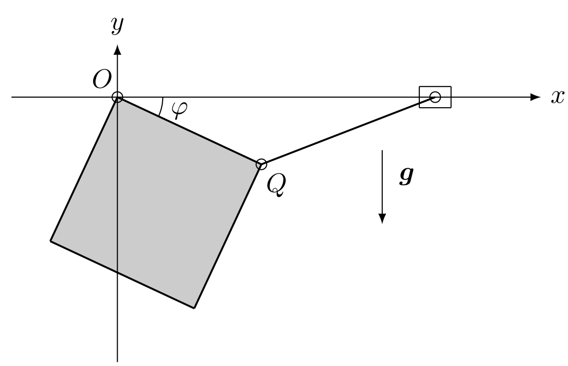
dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\rho \in \mathbb{R}^+$ è la distanza del punto dal centro di forza. Assumendo che la posizione e la velocità iniziali non siano parallele,

i) disegnare i ritratti di fase qualitativamente diversi che si presentano al variare del parametro reale α;

ii) determinare al variare di α il numero di orbite circolari, trovandone anche il raggio ed il periodo.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Una lamina quadrata omogenea di massa M e lato ℓ è vincolata in un suo vertice all'origine O attraverso una coppia rotoidale fissa. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $\sqrt{2}\ell$ è vincolata in un suo estremo ad un vertice della lamina attraverso una coppia rotoidale mobile, mentre l'altro estremo può scorrere lungo l'asse Ox. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.
Usando come parametro lagrangiano l'angolo φ che il lato OQ della lamina forma con l'asse Ox (si veda la figura), determinare l'energia meccanica del sistema.



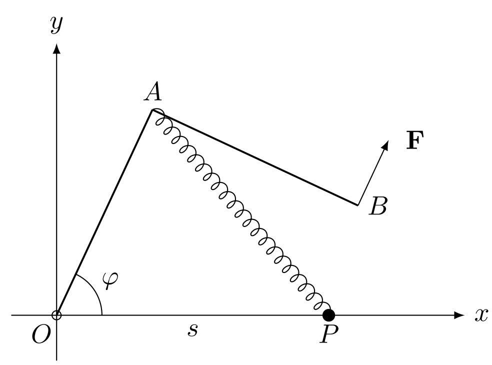
Terzo Esercizio

In un piano orizzontale (non agisce la forza di gravità) si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Una squadra OAB formata da due aste omogenee, ciascuna di massa m e lunghezza ℓ, saldate ad un loro estremo in modo da formare un angolo retto, è vincolata all'origine O attraverso una coppia rotoidale fissa. Un punto materiale P di massa M può scorrere lungo l'asse Ox. I punti A e P sono collegati tra loro da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Inoltre, in B è applicata la forza $\mathbf{F}$ di modulo pari a F e avente la stessa direzione e lo stesso verso del vettore $A - O$. Si assuma che i vincoli siano ideali.
Usando come parametri lagrangiani l'angolo φ che l'asta OA forma con l'asse Ox (si veda la figura) e l'ascissa s di P,

i) scrivere la seconda equazione cardinale della squadra rispetto ad O;

ii) scrivere le componenti del vettore delle forze (attive) generalizzate $\mathbf{Q} = (Q_\varphi, Q_s)$;

iii) trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.



Soluzione primo esercizio

i)
L'energia potenziale porge

$$V(\rho) = -\int f(\rho)\,d\rho = -\rho^4 + \alpha\rho.$$

Quindi possiamo ottenere l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = -\rho^4 + \alpha\rho + \frac{c^2}{2\rho^2}.$$

Abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to +\infty} V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = -\infty$$

e

$$\frac{dV_{\text{eff}}^{(c)}}{d\rho} = -4\rho^3 + \alpha - \frac{c^2}{\rho^3} = 0,$$

da cui

$$4\rho^6 - \alpha\rho^3 + c^2 = 0.$$

L'equazione appena scritta ammette soluzioni reali solo se

$$\alpha^2 - 16c^2 \geq 0.$$

Inoltre, ci possono essere soluzioni reali positive solo se $\alpha \geq 4|c|$. Se $\alpha = 4|c|$ la funzione $V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale, se $\alpha > 4|c|$ la funzione $V_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$ ha un punto di minimo e un punto di massimo.

In definitiva si presentano i suguenti tre casi:

a) $\alpha < 4|c|$ (vedi figura 1);

b) $\alpha = 4|c|$ (vedi figura 2);

c) $\alpha > 4|c|$ (vedi figura 3).

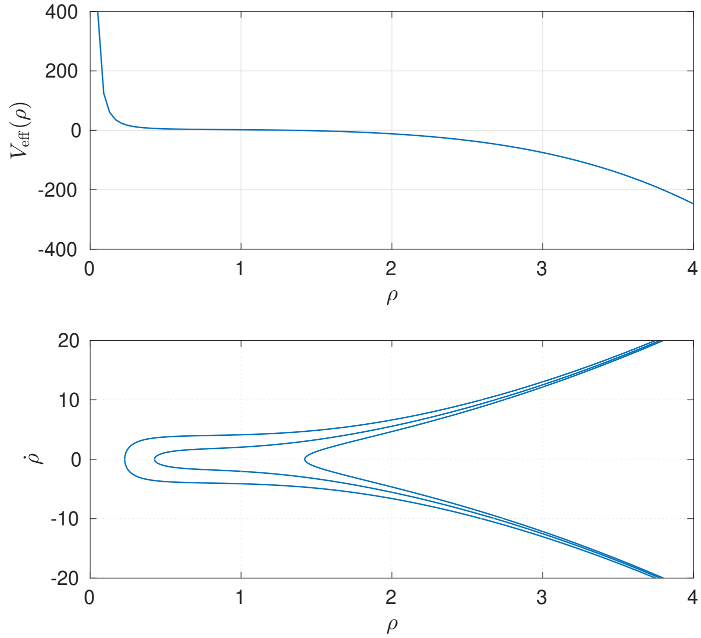


Figura 1: Caso $\alpha < 4|c|$. Non ci sono valori critici dell'energia.

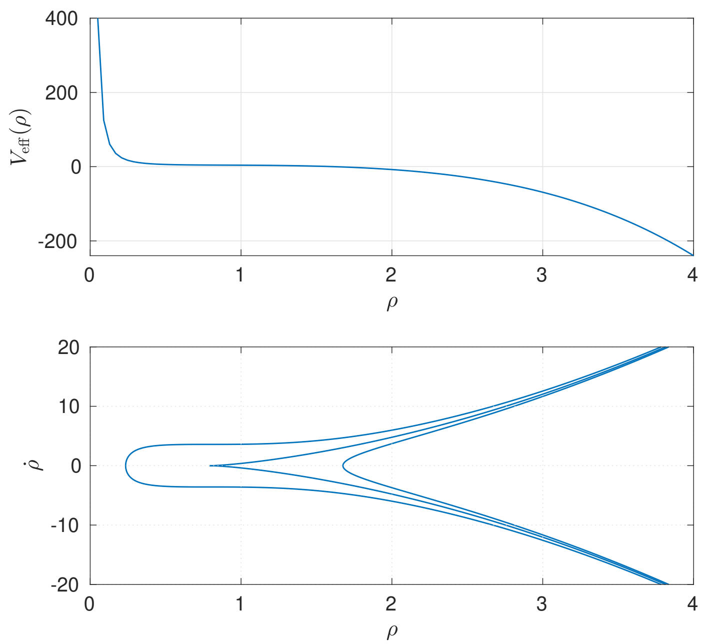


Figura 2: Caso $\alpha = 4|c|$. La curva di livello corrispodente al valore critico dell'energia presenta una cuspide.

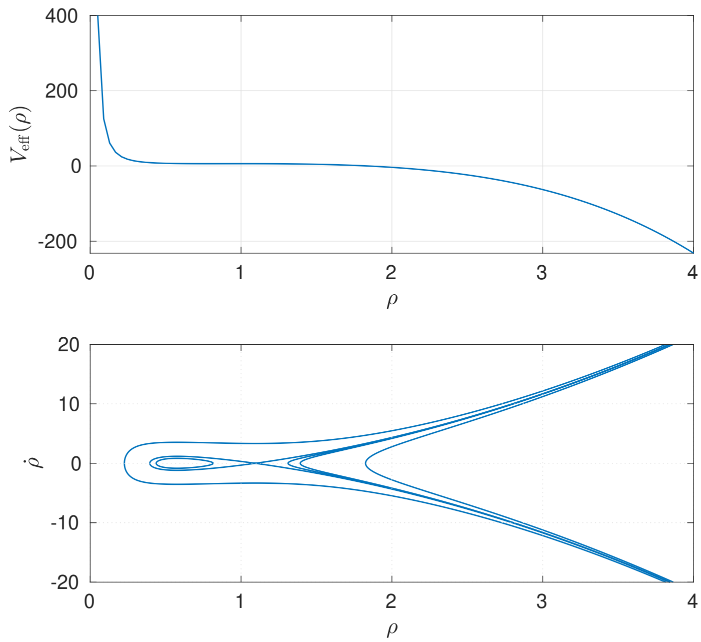


Figura 3: Caso $\alpha > 4|c|$. Ci sono due valori critici dell'energia.

ii)

a) $\alpha < 4|c|$: non ci sono orbite circolari;

b) $\alpha = 4|c|$: c'è una orbita circolare di raggio e periodo dati da

$$\bar{\rho} = \left(\frac{|c|}{2}\right)^{1/3}, \qquad T = \frac{2\pi\bar{\rho}^2}{|c|};$$

c) $\alpha > 4|c|$: ci sono due orbite circolari di raggio

$$\bar{\rho}_1 = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 16c^2}}{8}\right)^{1/3}, \qquad \bar{\rho}_2 = \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 16c^2}}{8}\right)^{1/3}$$

e periodo

$$T_1 = \frac{2\pi\bar{\rho}_1^2}{|c|}, \qquad T_2 = \frac{2\pi\bar{\rho}_2^2}{|c|}.$$

Soluzione secondo esercizio

L'energia meccanica del sistema è data da

$$E = T^L + T^a + V,$$

con T^L, T^a energie cinetiche della lamina e dell'asta, e V energia potenziale delle forze attive esterne che agiscono sul sistema.

Trattiamo prima la lamina. Le coordinate del suo baricentro G sono

$$\boldsymbol{\chi}_G = \frac{1}{2}\ell(\cos\varphi - \sin\varphi, -\sin\varphi - \cos\varphi, 0).$$

La sua velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega}^L = (0, 0, -\dot{\varphi}).$$

Notando che G è solidale alla lamina e si muove lungo una circonferenza di raggio costante si trova subito che

$$|\mathbf{v}_G|^2 = \frac{\ell^2}{2}\dot{\varphi}^2.$$

L'energia cinetica della lamina si calcola dalla formula

$$T^L = \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}I_{G,z}|\boldsymbol{\omega}^L|^2,$$

dove

$$I_{G,z} = \frac{M\ell^2}{6}$$

è il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse Gz. Risulta

$$T^L = \frac{M\ell^2}{3}\dot{\varphi}^2.$$

Trattiamo ora l'asta. Introduciamo l'angolo α tra l'asse Ox e l'asta. Le coordinate del suo baricentro B sono

$$\boldsymbol{\chi}_B = \ell\left(\cos\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha, -\frac{1}{2}\sin\varphi, 0\right).$$

Notando che

$$\sqrt{2}\ell\cos\alpha = \ell\sqrt{2 - \sin^2\varphi},$$

si ottiene

$$\boldsymbol{\chi}_B = \ell\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sin^2\varphi}, -\frac{1}{2}\sin\varphi, 0\right).$$

Determiniamo ora la velocità angolare dell'asta $\boldsymbol{\omega}^a$. Vale la relazione

$$\ell\sin\varphi = \sqrt{2}\ell\sin\alpha,$$

che derivata rispetto al tempo porta a scrivere

$$\dot{\alpha} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2 - \sin^2\varphi}}\dot{\varphi}.$$

Si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}^a = \left(0, 0, \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2 - \sin^2\varphi}}\dot{\varphi}\right).$$

Inoltre
$$|\mathbf{v}_B|^2 = \ell^2\dot\varphi^2\left(\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2(2-\sin^2\varphi)} + \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}}\right).$$
L'energia cinetica dell'asta si calcola dalla formula
$$T^a = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}I_{B,z}|\boldsymbol{\omega}^a|^2,$$
dove
$$I_{B,z} = \frac{m\ell^2}{6}$$
è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse Bz. Risulta
$$T^a = \frac{m\ell^2}{2}\dot\varphi^2\left(\sin^2\varphi + \frac{2\cos^2\varphi}{3(2-\sin^2\varphi)} + \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}}\right).$$

Infine abbiamo
$$V = Mgy_G + mgy_B = -\frac{Mg}{2}\ell(\sin\varphi + \cos\varphi) - \frac{mg}{2}\ell\sin\varphi.$$
L'energia meccanica richiesta porge
$$\begin{aligned}E = {}& \frac{M\ell^2}{3}\dot\varphi^2 + \frac{m\ell^2}{2}\dot\varphi^2\left(\sin^2\varphi + \frac{2\cos^2\varphi}{3(2-\sin^2\varphi)} + \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}}\right)\\ & -\frac{Mg}{2}\ell(\sin\varphi+\cos\varphi) - \frac{mg}{2}\ell\sin\varphi.\end{aligned}$$

Soluzione terzo esercizio

i)
La seconda equazione cardinale della squadra rispetto ad O è

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O,$$

dato che la velocità di O è nulla. Calcoliamo $\mathbf{M}_O$ tenendo conto che O è il centro istantaneo di rotazione della squadra:

$$\mathbf{M}_O = (0, 0, I_{O,z}\dot{\varphi}),$$

dove il momento di inerzia della squadra rispetto all'asse Oz è

$$I_{O,z} = I_{O,z}^{OA} + I_{O,z}^{AB} = \frac{5}{3}m\ell^2,$$

con

$$\begin{aligned} I_{O,z}^{OA} &= \frac{1}{3}m\ell^2, \\ I_{O,z}^{AB} &= \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{5}{4}m\ell^2 = \frac{4}{3}m\ell^2. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\mathbf{N}_O$. Le coordinate di A e P sono

$$\boldsymbol{\chi}_A = (\ell\cos\varphi, \ell\sin\varphi, 0), \qquad \boldsymbol{\chi}_P = (s, 0, 0).$$

Quindi la forza elastica che agisce su A diventa

$$\mathbf{F}_{\mathrm{el}} = k(\boldsymbol{\chi}_P - \boldsymbol{\chi}_A) = k(s - \ell\cos\varphi, -\ell\sin\varphi, 0),$$

ed il suo momento rispetto ad O è dato da

$$\boldsymbol{\chi}_A \times \mathbf{F}_{\mathrm{el}} = (0, 0 - ks\ell\sin\varphi).$$

Il momento di $\mathbf{F}$ si trova subito essere $(0, 0, F\ell)$. L'equazione richiesta proiettata lungo Oz si scrive come segue:

$$\frac{5}{3}m\ell\ddot{\varphi} = F - ks\sin\varphi.$$

ii)
Abbiamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_A &= (\ell\cos\varphi, \ell\sin\varphi, 0), \\ \boldsymbol{\chi}_B &= (\ell\cos\varphi + \ell\sin\varphi, \ell\sin\varphi - \ell\cos\varphi, 0), \\ \boldsymbol{\chi}_P &= (s, 0, 0). \end{aligned}$$

Otteniamo le derivate parziali

$$\begin{aligned} \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial\varphi} &= (-\ell\sin\varphi, \ell\cos\varphi, 0), & \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial s} &= (0, 0, 0), \\ \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial\varphi} &= (-\ell\sin\varphi + \ell\cos\varphi, \ell\cos\varphi + \ell\sin\varphi, 0), & \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial s} &= (0, 0, 0), \\ \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_P}{\partial\varphi} &= (0, 0, 0), & \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_P}{\partial s} &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Le forze attive che agiscono nei punti A, B, P del sistema sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{el}} &= k(s-\ell\cos\varphi, -\ell\sin\varphi, 0),\\ \mathbf{F} &= (F\cos\varphi, F\sin\varphi, 0),\\ -\mathbf{F}_{\text{el}} &= -k(s-\ell\cos\varphi, -\ell\sin\varphi, 0).\end{aligned}$$

Le forze generalizzate sono definite come segue:

$$\begin{aligned}Q_\varphi &= \mathbf{F}_{\text{el}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial\varphi} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial\varphi} - \mathbf{F}_{\text{el}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_P}{\partial\varphi} = \mathbf{F}_{\text{el}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial\varphi} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial\varphi},\\ Q_s &= \mathbf{F}_{\text{el}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial s} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial s} - \mathbf{F}_{\text{el}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_P}{\partial s} = -\mathbf{F}_{\text{el}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_P}{\partial s},\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}Q_\varphi &= \ell(F-ks\sin\varphi),\\ Q_s &= -k(s-\ell\cos\varphi).\end{aligned}$$

iii)
Per determinare le configurazioni di equilibrio del sistema consideriamo

$$\begin{cases}Q_\varphi = \ell(F-sk\sin\varphi) = 0,\\ Q_s = -k(s-\ell\cos\varphi) = 0.\end{cases}$$

Da queste due equazioni si ottiene

$$\begin{cases}s = \ell\cos\varphi,\\ \sin 2\varphi = \frac{2F}{k\ell}.\end{cases}$$

Se

$$\frac{2F}{k\ell} \le 1$$

allora esistono le quattro configurazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}(\varphi_1, s_1) &= \left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{2F}{k\ell}, \ell\cos\varphi_1\right),\\ (\varphi_2, s_2) &= \left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1, \ell\sin\varphi_1\right),\\ (\varphi_3, s_3) &= (\pi+\varphi_1, -\ell\cos\varphi_1),\\ (\varphi_4, s_4) &= \left(\frac{3\pi}{2}-\varphi_1, -\ell\sin\varphi_1\right).\end{aligned}$$

Altrimenti non ci sono configurazioni di equilibrio.

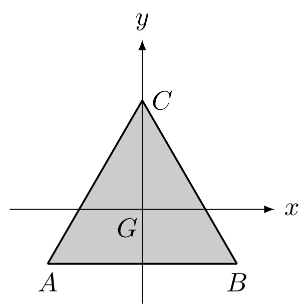
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

5 Giugno 2023

Primo Esercizio

Si consideri una lamina omogenea ABC di massa m avente la forma di un triangolo equilatero di lato ℓ. Si fissi un sistema di riferimento $Gxyz$, con G baricentro della lamina, asse Gx parallelo al lato AB ed asse Gy passante per C (si veda la figura).



i) Determinare le coordinate dei punti A, B, C nel sistema di riferimento $Gxyz$.

ii) Determinare la matrice di inerzia della lamina rispetto al sistema di riferimento $Gxyz$.

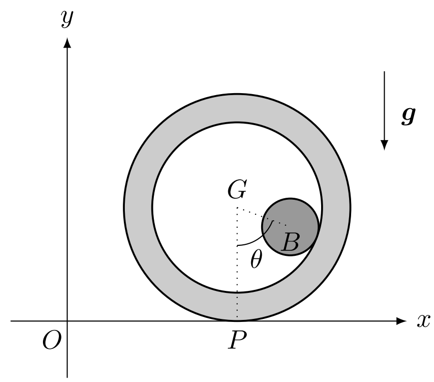
iii) Calcolare il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse passante per B e C.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Un disco omogeneo di massa m e raggio r rotola senza strisciare sul bordo interno di una corona circolare omogenea di massa M e raggi $4r$ e $3r$ che a sua volta rotola senza strisciare sull'asse Ox. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.
Siano B e G i baricentri del disco e della corona circolare, rispettivamente. Usando come parametri lagrangiani l'ascissa s del punto di contatto P della corona circolare con l'asse Ox e l'angolo θ che il segmento GP forma con il segmento GB (si veda la figura),

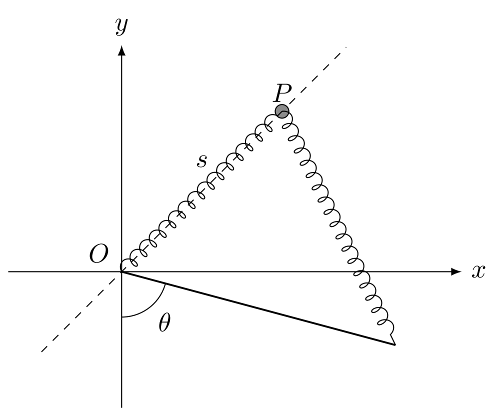
i) scrivere il momento angolare del disco rispetto al punto di contatto tra il disco e la corona circolare;

ii) scrivere le equazioni pure del moto del sistema.



Terzo Esercizio

In un piano orizzontale (non agisce la forza di gravità) si fissi un riferimento Oxy. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un punto materiale P di massa m che scivola lungo una guida rettilinea inclinata di $\pi/4$ rispetto all'asse x, e da un'asta omogenea di massa M e lunghezza ℓ avente un estremo vincolato nell'origine O da una coppia rotoidale fissa. L'altro estremo dell'asta è collegato al punto P da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (si veda la figura). Inoltre P è collegato ad O da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si assuma che i vincoli siano ideali.



Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s di P lungo la guida e l'angolo θ formato dall'asta con l'asse Oy,

i) trovare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità;

ii) calcolare le frequenze proprie e i modi normali delle piccole oscillazioni attorno alle eventuali configurazioni di equilibrio stabile del sistema.

Soluzione primo esercizio

i)
Le coordinate dei punti A, B, C nel sistema di riferimento $Gxyz$ sono

$$A-G=\left(-\frac{\ell}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\ell,0\right)^T,\qquad B-G=\left(\frac{\ell}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\ell,0\right)^T,$$
$$C-G=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\ell,0\right)^T.$$

ii)
Il piano perpendicolare alla lamina e passante per Gy è di simmetria per riflessione. Quindi l'asse Gx è principale di inerzia. Inoltre, il piano che contiene la lamina è di simmetria per riflessione. Quindi l'asse Gz è principale di inerzia. Segue che anche l'asse Gy è principale di inerzia.
Si può mostrare in modo analogo che anche l'asse passante per i punti G ed A è principale di inerzia.
Inoltre, si vede che i momenti di inerzia rispetto all'asse Gy e all'asse passante per i punti G ed A sono uguali tra loro. Allora, per un risultato visto a lezione, i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi passanti per G e giacenti sul piano della lamina sono uguali tra loro.
Da quanto detto si ha

$$I_G=\begin{bmatrix} I_{Gy} & 0 & 0\\ 0 & I_{Gy} & 0\\ 0 & 0 & 2I_{Gy}\end{bmatrix}.$$

Non resta che calcolare I_{Gy}:

$$I_{Gy}=2\sigma\int_0^{\frac{\ell}{2}}\int_0^{\sqrt{3}\left(\frac{\ell}{2}-x\right)}x^2dxdy=2\sigma\sqrt{3}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\ell}{2}-x\right)x^2dx=\frac{\sqrt{3}}{96}\sigma\ell^4=\frac{m\ell^2}{24},$$

dove abbiamo usato la relazione $\sigma=\frac{4m}{\sqrt{3}\ell^2}$.
Allora

$$I_G=\frac{m\ell^2}{24}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

iii)
Il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse passante per B e C è uguale al momento di inerzia della lamina rispetto all'asse passante per A e B il quale si può scrivere come segue

$$I=I_{Gx}+m\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\ell\right)^2=I_{Gy}+\frac{m\ell^2}{12}=\frac{m\ell^2}{8}.$$

Soluzione secondo esercizio

i)
Chiamiamo H il punto di contatto tra il disco e la corona circolare. Il momento angolare del disco rispetto ad H lo possiamo calcolare dalla formula

$$\mathbf{M}_H = I^d_{Bz}\boldsymbol{\omega}^d + m(\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_H) \times \mathbf{v}_B,$$

dove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_B &= (s + 2r\sin\theta,\, 4r - 2r\cos\theta,\, 0)^T,\\ \boldsymbol{\chi}_H &= (s + 3r\sin\theta,\, 4r - 3r\cos\theta,\, 0)^T\end{aligned}$$

e

$$I^d_{Bz} = \frac{mr^2}{2}.$$

Calcoliamo la velocità angolare del disco $\boldsymbol{\omega}^d$ dalla formula

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_H + \boldsymbol{\omega}^d \times (\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_H). \tag{1}$$

La velocità di H come punto solidale al disco si può ottenere da

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega}^c \times (\boldsymbol{\chi}_H - \boldsymbol{\chi}_G),$$

dove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_G &= (s,\, 4r,\, 0)^T,\\ \mathbf{v}_G &= (\dot{s},\, 0,\, 0)^T,\\ \mathbf{v}_B &= (\dot{s} + 2r\dot{\theta}\cos\theta,\, 2r\dot{\theta}\sin\theta,\, 0)^T\end{aligned}$$

e $\boldsymbol{\omega}^c$ è la velocità angolare della corona circolare,

$$\boldsymbol{\omega}^c = \left(0,\, 0,\, -\frac{\dot{s}}{4r}\right)^T.$$

Si ottiene

$$\mathbf{v}_H = \dot{s}\left(1 - \frac{3}{4}\cos\theta,\, -\frac{3}{4}\sin\theta,\, 0\right)^T.$$

Dall'equazione (1) si ha

$$\boldsymbol{\omega}^d = -\left(0,\, 0,\, 2\dot{\theta} + \frac{3\dot{s}}{4r}\right)^T.$$

Risulta

$$\mathbf{M}_H = (0,\, 0,\, M_H)^T,$$

con

$$M_H = -mr\left[\dot{s}\left(\frac{3}{8} + \cos\theta\right) + 3r\dot{\theta}\right].$$

ii)
L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}I^c_{Gz}|\boldsymbol{\omega}^c|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}I^d_{Bz}|\boldsymbol{\omega}^d|^2,$$

dove l'unica quantità da calcolare è I^c_{Gz}:

$$I^c_{Gz} = \frac{\sigma\pi}{2}\left[(4r)^4 - (3r)^4\right] = \frac{25}{2}Mr^2.$$

Risulta

$$T = \frac{57M + 41m}{64}\dot{s}^2 + 3mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr\dot{s}\dot{\theta}\left(\frac{3}{2} + 4\cos\theta\right).$$

L'energia potenziale è

$$V = 4rMg + (4r - 2r\cos\theta)mg.$$

Introduciamo la funzione lagrangiana $L = T - V$. La prima equazione pura del moto si trova dall'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial L}{\partial s},$$

che porge

$$\frac{57M + 41m}{32}\ddot{s} + \frac{mr}{2}\left(\frac{3}{2} + 4\cos\theta\right)\ddot{\theta} - 2mr\dot{\theta}^2\sin\theta = 0.$$

La seconda equazione pura del moto si trova dall'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta},$$

che porge

$$6mr^2\ddot{\theta} + \frac{mr}{2}\left(\frac{3}{2} + 4\cos\theta\right)\ddot{s} = -2mrg\sin\theta.$$

Soluzione terzo esercizio

i)
Chiamiamo A l'estremo non vincolato dell'asta. Le posizioni di A e P sono

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_P &= \frac{\sqrt{2}}{2}s(1,\,1,\,0)^T,\\ \boldsymbol{\chi}_A &= \ell(\sin\theta,\,-\cos\theta,\,0)^T.\end{aligned}$$

L'energia potenziale è data da

$$V = \frac{1}{2}k\big(|\boldsymbol{\chi}_P|^2 + |\boldsymbol{\chi}_P - \boldsymbol{\chi}_A|^2\big) = \frac{1}{2}k\left[2s^2 + \sqrt{2}\ell s(\cos\theta - \sin\theta) + \ell^2\right].$$

Imponiamo il sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial s} &= 2ks + \frac{\sqrt{2}}{2}k\ell(\cos\theta - \sin\theta) = 0,\\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}k\ell s(\cos\theta + \sin\theta) = 0.\end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ha $s = 0$ e sostituendo nella prima si trova

$$\cos\theta = \sin\theta,$$

che per $\theta \in [0,\,2\pi)$ ammette come soluzioni $\theta_1 = \pi/4$ e $\theta_2 = 5\pi/4$. Di nuovo dalla seconda equazione si ha

$$\cos\theta = -\sin\theta,$$

che ammette come soluzioni $\theta_3 = 3\pi/4$ e $\theta_4 = 7\pi/4$. Sostituendo θ_3 e θ_4 nella prima equazione del sistema si ottiene $s_3 = \ell/2$ ed $s_4 = -\ell/2$, rispettivamente. Ci sono allora le seguenti quattro configurazioni di equilibrio:

$$(s_1,\theta_1) = \left(0,\,\frac{\pi}{4}\right), \qquad (s_2,\theta_2) = \left(0,\,\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$(s_3,\theta_3) = \left(\frac{\ell}{2},\,\frac{3\pi}{4}\right), \qquad (s_4,\theta_4) = \left(-\frac{\ell}{2},\,\frac{7\pi}{4}\right).$$

Studiamo ora la loro stabilità. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} &= 2k,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}k\ell s(\sin\theta - \cos\theta),\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial s} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}k\ell(\cos\theta + \sin\theta)\end{aligned}$$

ed introduciamo

$$V'' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial s} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial s} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$V''(s_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} 2k & -k\ell \\ -k\ell & 0 \end{pmatrix}, \qquad V''(s_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} 2k & k\ell \\ k\ell & 0 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(s_1, \theta_1) = \det V''(s_2, \theta_2) < 0,$$

si conclude che (s_1, θ_1), (s_2, θ_2) sono configurazioni di equilibrio instabili. Infine, abbiamo

$$V''(s_3, \theta_3) = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \dfrac{k\ell^2}{2} \end{pmatrix}, \qquad V''(s_4, \theta_4) = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \dfrac{k\ell^2}{2} \end{pmatrix},$$

da cui si vede che, per il teorema di Lagrange-Dirichlet, (s_3, θ_3), (s_4, θ_4) sono configurazioni di equilibrio stabili.

ii)
Poniamo $\tilde{V}'' = V''(s_3, \theta_3) = V''(s_4, \theta_4)$. L'equazione secolare diventa

$$\det(\tilde{V}'' - \lambda A) = 0,$$

dove A è la matrice cinetica del sistema meccanico:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \dfrac{M\ell^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Si ha l'equazione

$$(2k - \lambda m)\left(\frac{k}{2} - \lambda\frac{M}{3}\right)\ell^2 = 0,$$

dalla quale si ottengono subito le frequenze proprie

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}.$$

Poichè la matrice $\tilde{V}'' - \lambda A$ è diagonale possiamo subito dire che i modi normali sono dati da

$$c_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\mathbf{u}_1, \qquad c_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\mathbf{u}_2,$$

con c_1, $c_2 > 0$, φ_1, $\varphi_2 \in S^1$ e

$$\mathbf{u}_1 = (1,\, 0)^T, \qquad \mathbf{u}_2 = (0,\, 1)^T.$$

Compito di Meccanica Razionale

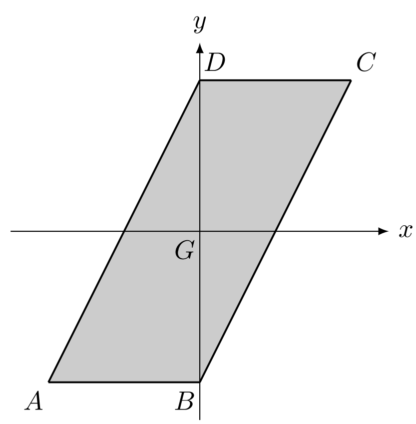
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

26 Giugno 2023

Primo Esercizio

Si consideri una lamina omogenea $ABCD$ di massa m avente la forma di un parallelogramma. Si fissi un sistema di riferimento $Gxyz$, con G baricentro della lamina, asse Gx parallelo al lato AB ed asse Gy passante per B e D (si veda la figura). Le coordinate dei vertici della lamina sono

$$A \equiv (-\ell, -\ell), \quad B \equiv (0, -\ell), \quad C \equiv (\ell, \ell), \quad D \equiv (0, \ell).$$



i) Determinare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Gx, Gy;

ii) dire se il sistema di riferimento $Gxyz$ è principale di inerzia per la lamina, motivando la risposta;

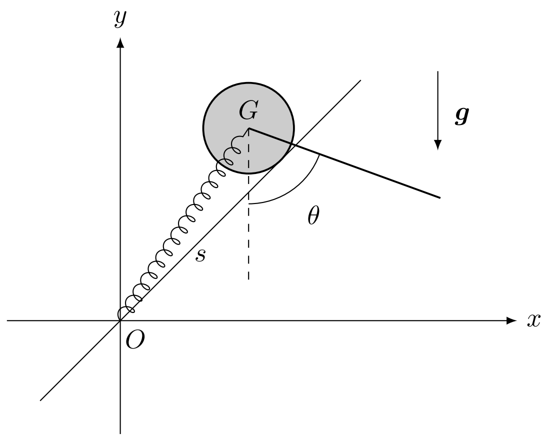
iii) calcolare il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse passante per A e C.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il seguente sistema meccanico. Un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una guida rettilinea fissa inclinata di $\pi/4$ rispetto all'asse Ox. Un'asta amogenea di massa m e lunghezza ℓ ha un estremo vincolato al baricentro G del disco attraverso una coppia rotoidale mobile. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega G con O. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.
Usando come parametri lagrangiani l'ascissa s di G lungo la guida e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse verticale (si veda la figura),

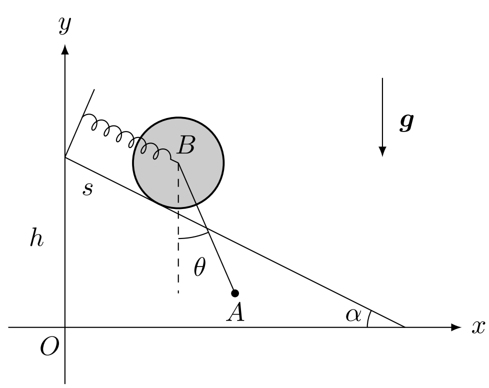
i) scrivere le equazioni pure del moto del sistema usando le equazioni cardinali della dinamica;

ii) scrivere la lagrangiana del sistema.



Terzo Esercizio

In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R al cui baricentro B è vincolato tramite una coppia rotoidale mobile un estremo di un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. All'altro estremo A dell'asta è saldato un punto materiale di massa m. Il disco può rotolare senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α costante rispetto all'asse Ox. Il baricentro B del disco è collegato tramite una molla di costante $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla al punto di coordinate $(x, y) = (R \sin\alpha, h + R\cos\alpha)$, dove h è l'altezza del piano inclinato (si veda la figura).



Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto tra disco e piano inclinato (contata dal punto più alto) e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale,

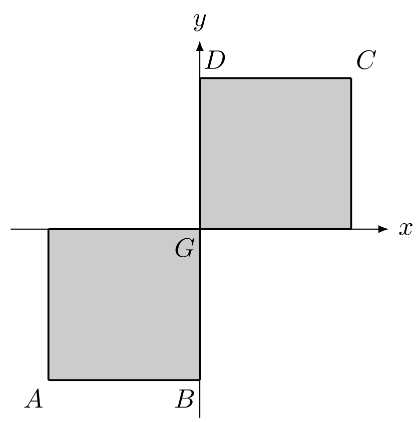
i) trovare gli equilibri e discuterne la stabilità;

ii) assumendo $(\frac{3}{2}M + m)g = k\ell$, trovare le frequenze proprie di oscillazione attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile;

iii) scrivere la reazione vincolare esercitata dalla guida sul disco in corrispondenza della configurazione di equilibrio stabile.

Soluzione primo esercizio

i)
Chiamiamo H, Q i punti di intersezione dei segmenti AD, BC con l'asse Gx, rispettivamente.
Calcoliamo il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse Gx. Trasliamo i punti della regione corrispondente al triangolo HGD in modo che i segmenti HD e QC coincidano. Trasliamo i punti della regione corrispondente al triangolo GBQ in modo che i segmenti BQ e AH coincidano. Si ottiene quanto mostrato nella seguente figura.



Allora si ha subito

$$I_{Gx} = 2\sigma \int_0^\ell \int_0^\ell y^2 dxdy = \frac{2}{3}\sigma\ell^4 = \frac{m\ell^2}{3},$$

dove

$$\sigma = \frac{m}{2\ell^2}$$

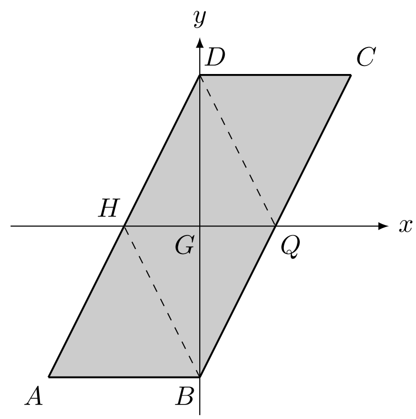
è la densità della lamina.
Calcoliamo il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse Gy. Notando che i contributi delle regioni triangolari BCD e ABD sono uguali e poichè l'equazione della retta passante per B e C risulta

$$y = 2x - \ell$$

si ha

$$I_{Gy} = 2\sigma \int_0^\ell \int_{2x-\ell}^\ell x^2 dxdy = 4\sigma \int_0^\ell x^2(\ell - x)dx = \frac{1}{3}\sigma\ell^4 = \frac{m\ell^2}{6}.$$

ii)
Si consideri la figura nella pagina successiva. Basta notare che il contributo al momento centrifugo della regione a forma di rombo $BQDH$ è nullo e che i contributi delle due regioni triangolari QCD e ABH hanno lo stesso segno (sono uguali in realtà).



iii)
Calcoliamo il momento centrifugo. Notando che i contributi delle regioni triangolari BCD e ABD sono uguali si può scrivere

$$I_{Gxy} = -2\sigma \int_0^\ell \int_{2x-\ell}^\ell xy dx dy = -4\sigma \int_0^\ell x(x\ell - x^2)dx = -\frac{1}{3}\sigma\ell^4 = -\frac{m\ell^2}{6}.$$

La matrice di inerzia rispetto al riferimento $Gzyz$ risulta

$$I_G = \frac{m\ell^2}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Introduciamo il versore

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)^T.$$

Allora il momento di inerzia richiesto è dato da

$$I = \mathbf{u} \cdot I_G \mathbf{u} = \frac{1}{2}(I_{Gx} + I_{Gy} + 2I_{Gxy}) = \frac{m\ell^2}{12}.$$

Soluzione secondo esercizio

i)
Introduciamo l'asse Gz ed i versori

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T, \qquad \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T, \qquad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T,$$

$$\mathbf{e}_s = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)^T, \qquad \mathbf{e}_t = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1,0)^T.$$

Chiamiamo B il baricentro dell'asta. Le posizioni di G e B sono

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_G &= s\mathbf{e}_s + R\mathbf{e}_t,\\ \boldsymbol{\chi}_B &= s\mathbf{e}_s + R\mathbf{e}_t + \frac{\ell}{2}(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale del disco rispetto a G

$$\dot{\mathbf{M}}_G = \mathbf{N}_G. \tag{1}$$

Abbiamo

$$\mathbf{M}_G = I^d_{Gz}\boldsymbol{\omega}^d = -\frac{MR}{2}\dot{s}\,\mathbf{e}_3,$$

con I^d_{Gz} momento di inerzia del disco rispetto a Gz e $\boldsymbol{\omega}^d$ velocità angolare del disco:

$$I^d_{Gz} = \frac{MR^2}{2}, \qquad \boldsymbol{\omega}^d = -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_3.$$

Inoltre,

$$\mathbf{N}_G = -R\mathbf{e}_t \times \boldsymbol{\Phi},$$

dove abbiamo introdotto la reazione della guida sul disco

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi_s\mathbf{e}_s + \Phi_t\mathbf{e}_t.$$

L'equazione (1) diventa

$$-\frac{M}{2}\ddot{s} = \Phi_s. \tag{2}$$

La prima equazione cardinale del sistema proiettata lungo $\mathbf{e}_s$ si scrive come segue:

$$(M\ddot{\boldsymbol{\chi}}_G + m\ddot{\boldsymbol{\chi}}_B)\cdot\mathbf{e}_s = -g(M+m)\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_s - ks + \Phi_s,$$

da cui

$$\begin{aligned}&(M+m)\ddot{s} + \frac{m\ell}{2}\Big[\big(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\big)\mathbf{e}_1 + \big(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\big)\mathbf{e}_2\Big]\cdot\mathbf{e}_s =\\ &-g(M+m)\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_s - ks + \Phi_s.\end{aligned}$$

Notando che

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_s = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

si ha

$$\begin{aligned}&(M+m)\ddot{s} + \frac{\sqrt{2}}{4}m\ell\Big[\ddot{\theta}(\cos\theta+\sin\theta) - \dot{\theta}^2(\sin\theta - \cos\theta)\Big] =\\ &-\frac{\sqrt{2}}{2}g(M+m) - ks + \Phi_s.\end{aligned}$$

Infine, usando l'equazione (2), si ottiene un'equazione pura del moto

$$\left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{s} + \frac{\sqrt{2}}{4}m\ell\left[\ddot{\theta}(\cos\theta + \sin\theta) + \dot{\theta}^2(\cos\theta - \sin\theta)\right] =$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}g(M+m) - ks.$$

La seconda equazione pura del moto si ottiene scrivendo la seconda equazione cardinale dell'asta rispetto al polo G

$$\dot{\mathbf{M}}_G = \mathbf{N}_G - m\dot{\boldsymbol{\chi}}_G \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_B. \tag{3}$$

Notando che

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_s = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_3,$$

abbiamo

$$\mathbf{M}_G = I^a_{Gz}\boldsymbol{\omega}^a + m(\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_G) \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_G = m\ell\left[\frac{\ell}{3}\dot{\theta} + \frac{\sqrt{2}}{4}\dot{s}(\cos\theta + \sin\theta)\right]\boldsymbol{e}_3,$$

con I^a_{Gz} momento di inerzia dell'asta rispetto a Gz e $\boldsymbol{\omega}^a$ velocità angolare dell'asta:

$$I^a_{Gz} = \frac{m\ell^2}{3}, \qquad \boldsymbol{\omega}^a = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_3.$$

Inoltre,

$$\mathbf{N}_G = -mg(\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_G) \times \mathbf{e}_2 = -\frac{\ell}{2}mg\sin\theta\mathbf{e}_3$$

e

$$m\dot{\boldsymbol{\chi}}_G \times \dot{\boldsymbol{\chi}}_B = \frac{\sqrt{2}}{4}m\ell\dot{\theta}\dot{s}(\sin\theta - \cos\theta)\mathbf{e}_3.$$

L'equazione (3) diventa

$$\frac{\ell}{3}\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ddot{s}(\cos\theta + \sin\theta) = -\frac{g}{2}\sin\theta.$$

ii)
L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2}I^d_{Gz}|\boldsymbol{\omega}^d|^2 + \frac{1}{2}M|\dot{\boldsymbol{\chi}}_G|^2 + \frac{1}{2}I^a_{Bz}|\boldsymbol{\omega}^a|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{\chi}}_B|^2,$$

dove le quantità che compaiono al secondo membro sono state precedentemente introdotte (eccetto $I_{Bz} = m\ell^2/12$). Risulta

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{s}^2 + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}m\ell\dot{s}\dot{\theta}(\cos\theta + \sin\theta).$$

L'energia potenziale è

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2}g(M+m)(s+R) - \frac{\ell}{2}mg\cos\theta + \frac{k}{2}(s^2 + R^2)$$

La lagrangiana è data dalla funzione $L = T - V$.

Soluzione terzo esercizio

i)
Scriviamo le coordinate di A e B:

$$\boldsymbol{\chi}_A = (s\cos\alpha + R\sin\alpha + \ell\sin\theta,\ h - s\sin\alpha + R\cos\alpha - \ell\cos\theta)^T,$$
$$\boldsymbol{\chi}_B = (s\cos\alpha + R\sin\alpha,\ h - s\sin\alpha + R\cos\alpha)^T.$$

L'energia potenziale delle forze attive agenti sul sistema diventa

$$V = \frac{1}{2}ks^2 + g(M+m)(h - s\sin\alpha + R\cos\alpha) - mg\ell\cos\theta.$$

Otteniamo il sistema

$$\frac{\partial V}{\partial s} = ks - g(M+m)\sin\alpha = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl\sin\theta = 0.$$

Ci sono allora le seguenti due configurazioni di equilibrio:

$$(s_1,\theta_1) = \left(\frac{g(M+m)}{k}\sin\alpha, 0\right), \qquad (s_2,\theta_2) = \left(\frac{g(M+m)}{k}\sin\alpha, \pi\right).$$

Per studiarne la stabilità, introduciamo la matrice delle derivate seconde:

$$V'' = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\ell\cos\theta \end{bmatrix},$$

dove abbiamo usato

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = mg\ell\cos\theta.$$

Si ha

$$V''(s_1,\theta_1) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\ell \end{bmatrix},$$

perciò la configurazione di equilibrio (s_1,θ_1) è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet. Infine,

$$V''(s_2,\theta_2) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -mg\ell \end{bmatrix},$$

da cui segue subito che la configurazione di equilibrio (s_2,θ_2) è instabile.

ii)
Scriviamo l'energia cinetica del sistema meccanico:

$$T = \frac{1}{2}I_z|\boldsymbol{\omega}|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_A|^2,$$

dove

$$I_z = \frac{3}{2}MR^2, \qquad |\boldsymbol{\omega}|^2 = \frac{\dot{s}^2}{R^2}$$

e

$$|\mathbf{v}_A|^2 = \dot{s}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{s}\cos(\theta+\alpha).$$

Risulta

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{s}^2 + m\ell^2\dot{\theta}^2 + 2m\dot{\theta}\dot{s}\cos(\theta+\alpha)\right].$$

Possiamo quindi calcolare la matrice cinetica

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}M + m & m\ell\cos(\theta+\alpha) \\ m\ell\cos(\theta+\alpha) & m\ell^2 \end{bmatrix}.$$

Assumiamo

$$\frac{3}{2}M + m = \frac{k\ell}{g}.$$

Consideriamo l'equazione secolare

$$\det(V''(s_1,\theta_1) - \lambda A(s_1,\theta_1)) = 0,$$

che diventa

$$\lambda^2\left(\frac{k\ell^2}{g} - m\ell\cos^2\alpha\right) - 2k\ell\lambda + kg = 0.$$

Le soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{g/\ell}{1 - J\cos\alpha}, \qquad \lambda_2 = \frac{g/\ell}{1 + J\cos\alpha}, \qquad J = \sqrt{\frac{mg}{k\ell}}.$$

Infine, le frequenze proprie richieste sono date da

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}.$$

iii)
Scriviamo la prima equazione cardinale della statica del sistema in corrispondenza della configurazione di equilibrio stabile (s_1, θ_1):

$$\begin{aligned} &\Phi_x - ks_1\cos\alpha = 0, \\ &\Phi_y + ks_1\sin\alpha - g(M+m) = 0, \end{aligned}$$

dove Φ_x, Φ_y sono le componenti della reazione vincolare esercitata dalla guida sul disco. Si ottiene

$$\begin{aligned} &\Phi_x = g(M+m)\sin\alpha\cos\alpha, \\ &\Phi_y = g(M+m)\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Compito di Meccanica Razionale

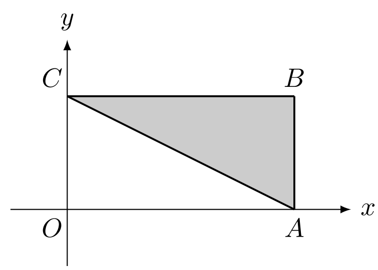
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

17 Luglio 2023

Primo Esercizio

Si consideri una lamina omogenea ABC di massa m avente la forma di un triangolo rettangolo. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Le coordinate dei vertici della lamina sono

$$A \equiv (2\ell, 0, 0), \quad B \equiv (2\ell, \ell, 0), \quad C \equiv (0, \ell, 0).$$

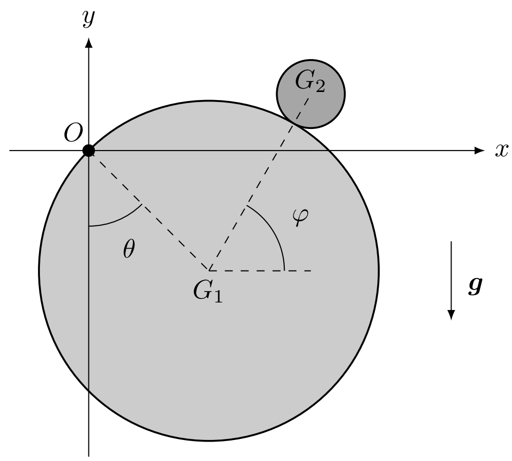


i) Determinare la matrice di inerzia della lamina rispetto al sistema di riferimento $Oxyz$.

ii) Calcolare il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse passante per i punti A e C.

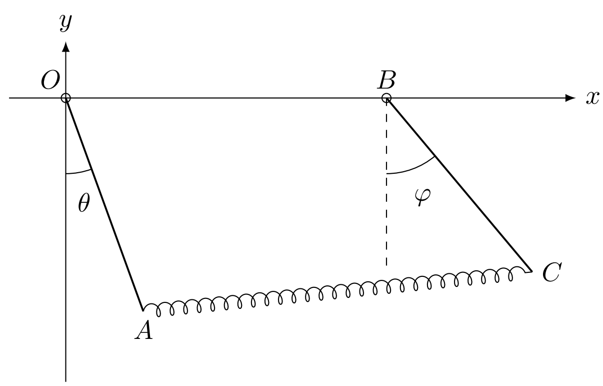
Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy con l'asse Oy verticale ascendente. Un disco $\mathcal{D}_1$ omogeneo di massa M e raggio R è vincolato in un punto del suo bordo all'origine O tramite una coppia rotoidale fissa. Un secondo disco $\mathcal{D}_2$ omogeneo di massa m e raggio r rotola senza strisciare sul bordo di $\mathcal{D}_1$. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.
Chiamiamo G_1 e G_2 i baricentri di $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, rispettivamente. Usando come parametri lagrangiani l'angolo θ tra il segmento OG_1 e la direzione dell'asse Oy e l'angolo φ tra il segmento G_1G_2 e la direzione dell'asse Ox (si veda la figura), scrivere le equazioni pure del moto del sistema usando il formalismo lagrangiano.



Terzo Esercizio

In un piano orizzontale (non agisce la forza di gravità) si introduca un sistema di riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da due aste uguali OA e BC, ciascuna di massa m e lunghezza 2ℓ. Gli estremi O e $B \equiv (2\sqrt{2}\ell, 0)$ sono vincolati attraverso una coppia rotoidale fissa. Gli estremi A e C sono collegati tramite una molla di costante $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si assuma che i vincoli siano ideali.



Usando come coordinate lagrangiane gli angoli θ e φ formati dalle due aste con la direzione dell'asse Oy (si veda la figura),

i) trovare gli equilibri del sistema;

ii) discutere la stabilità degli equilibri trovati.

Soluzione primo esercizio

i)
L'equazione della retta passante per i punti A e C è data da

$$y = -\frac{1}{2}x + \ell,$$

che possiamo anche scrivere come

$$x = -2y + 2\ell.$$

Calcoliamo il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse Ox:

$$I_{Ox} = \sigma \int_0^\ell \int_{-2y+2\ell}^{2\ell} y^2 dxdy = \sigma \int_0^\ell y^2(2\ell + 2y - 2\ell)dy = \frac{\sigma\ell^4}{2} = \frac{m\ell^2}{2},$$

dove

$$\sigma = \frac{m}{\ell^2}$$

è la densità della lamina.
Calcoliamo il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse Oy:

$$I_{Oy} = \sigma \int_0^{2\ell} \int_{-\frac{1}{2}x+\ell}^{\ell} x^2 dxdy = \sigma \int_0^{2\ell} x^2 \left(\ell + \frac{1}{2}x - \ell\right) dx = 2\sigma\ell^4 = 2m\ell^2.$$

Calcoliamo il momento di inerzia centrifugo I_{Oxy}:

$$\begin{aligned} I_{Oxy} &= -\sigma \int_0^\ell \int_{-2y+2\ell}^{2\ell} xydxdy = -\frac{\sigma}{2}\int_0^\ell y\left[(2\ell)^2 - (-2y+2\ell)^2\right] dy \\ &= -\frac{\sigma}{2}\int_0^\ell (8y^2\ell - 4y^3)dy = -\frac{5\sigma\ell^4}{6} = -\frac{5m\ell^2}{6}. \end{aligned}$$

Infine

$$I_{Oz} = \frac{5m\ell^2}{2}.$$

La matrice richiesta e'

$$I_O = m\ell^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & 0 \\ -\frac{5}{6} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

ii)
Consideriamo un sistema di riferimento $Gxyx$ con G baricentro del rettangolo $OABC$ ed assi Gx, Gy, Gz paralleli agli assi Ox, Oy, Oz, rispettivamente.
I momenti di inerzia della lamina rettangolare omogenea $OABC$ di densità σ rispetto agli assi Gx, Gy, Gz sono

$$I_{Gx} = \frac{m^{(r)}\ell^2}{12}, \qquad I_{Gy} = \frac{m^{(r)}\ell^2}{3}, \qquad I_{Gz} = \frac{5m^{(r)}\ell^2}{12},$$

dove $m^{(r)} = 2m$. Inoltre tali assi sono principali di inerzia per la lamina rettangolare. Dunque

$$I_G^{(r)} = \frac{m^{(r)}\ell^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Introduciamo un versore associato alla retta passante per i punti A e C:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0)^T.$$

Il momento di inerzia della lamina ABC rispetto all'asse passante per i punti A e C sarà dato da

$$I = \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot I_G^{(r)}\mathbf{u} = \frac{2m\ell^2}{15}.$$

Soluzione secondo esercizio

i)
Chiamiamo T_i e V_i rispettivamente l'energia cinetica e potenziale di $\mathcal{D}_i$, con $i = 1, 2$. La lagrangiana del sistema sarà

$$L = T_1 + T_2 - V_1 - V_2.$$

Calcoliamo T_i:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_{G_i}|^2 + \frac{1}{2} I_{G_i} |\boldsymbol{\omega}_i|^2,$$

dove $m_1 = M$, $m_2 = m$, $\mathbf{v}_{G_i}$ è la velocità di G_i, $\boldsymbol{\omega}_i$ è la velocità angolare di $\mathcal{D}_i$ e I_{G_i} è il momento di inerzia di $\mathcal{D}_i$ rispetto ad un asse parallelo ad Oz e passante per G_i.
Cominciamo da T_1. La posizione di G_1 è data da

$$\mathbf{x}_{G_1} = R(\sin\theta, -\cos\theta, 0)^T.$$

La sua velocità diventa

$$\mathbf{v}_{G_1} = R\dot{\theta}(\cos\theta, \sin\theta, 0)^T,$$

da cui

$$|\mathbf{v}_{G_1}|^2 = R^2\dot{\theta}^2.$$

Considerando come retta fissa nel sistema $Oxyz$ l'asse Oy e come retta solidale a $\mathcal{D}_1$ quella passante per O e G_1, otteniamo che

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (0, 0, \dot{\theta})^T.$$

Inoltre

$$I_{G_1} = \frac{1}{2} M R^2.$$

In definitiva si ottiene

$$T_1 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2.$$

Calcoliamo ora T_2. La posizione di G_2 è data da

$$\mathbf{x}_{G_2} = \big(R\sin\theta + (R + r)\cos\varphi, -R\cos\theta + (R + r)\sin\varphi, 0\big)^T.$$

La sua velocità diventa

$$\mathbf{v}_{G_2} = \big(R\dot{\theta}\cos\theta - (R + r)\dot{\varphi}\sin\varphi, R\dot{\theta}\sin\theta + (R + r)\dot{\varphi}\cos\varphi, 0\big)^T,$$

da cui

$$|\mathbf{v}_{G_2}|^2 = R^2\dot{\theta}^2 + (R + r)^2\dot{\varphi}^2 + 2R(R + r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta - \varphi).$$

Per calcolare

$$\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 0, \omega_2)^T$$

sfruttiamo la formula fondamentale della cinematica rigida. Sia

$$\mathbf{x}_P = R(\sin\theta + \cos\varphi, -\cos\theta + \sin\varphi, 0)^T$$

la posizione del punto di contatto tra i dischi. Per $i = 1, 2$, chiamando $\mathbf{v}_P^{\mathcal{D}_i}$ la velocità del punto di $\mathcal{D}_i$ che occupa istantaneamente la posizione $\mathbf{x}_P$. Abbiamo che

$$\mathbf{v}_{G_2} = \mathbf{v}_P^{\mathcal{D}_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x}_{G_2} - \mathbf{x}_P). \tag{1}$$

Per via del moto di puro rotolamento, vale che

$$\mathbf{v}_P^{\mathcal{D}_1} = \mathbf{v}_P^{\mathcal{D}_2}.$$

Applicando la formula fondamentale della cinematica rigida a $\mathcal{D}_1$ coi punti solidali P ed O, troviamo

$$\mathbf{v}_P^{\mathcal{D}_1} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) = R\dot{\theta}(\cos\theta - \sin\varphi,\, \sin\theta + \cos\varphi,\, 0)^T.$$

Proiettando l'equazione (1) lungo l'asse Ox otteniamo

$$\omega_2 = \frac{R+r}{r}\dot{\varphi} - \frac{R}{r}\dot{\theta}.$$

Inoltre

$$I_{G_2} = \frac{1}{2}mr^2.$$

In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + mR(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi) \\
&\quad + \frac{1}{4}mr^2\left(\frac{R+r}{r}\dot{\varphi} - \frac{R}{r}\dot{\theta}\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + mR(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\left[\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\right].
\end{aligned}$$

Passando all'energia potenziale, troviamo

$$\begin{aligned}
V_1 &= -MgR\cos\theta, \\
V_2 &= mg[-R\cos\theta + (R+r)\sin\varphi].
\end{aligned}$$

La lagrangiana porge

$$\begin{aligned}
L = &\frac{3}{4}(m+M)R^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + mR(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\left[\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\right] \\
&+ (m+M)gR\cos\theta - mg(R+r)\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{3}{2}(M+m)R^2\dot{\theta} + mR(R+r)\dot{\varphi}\left[\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\right], \\
\frac{\partial L}{\partial\theta} &= mR(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) - (M+m)gR\sin\theta
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{3}{2}m(R+r)^2\dot{\varphi} + mR(R+r)\dot{\theta}\left[\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\right], \\
\frac{\partial L}{\partial\varphi} &= -mR(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) - mg(R+r)\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= \frac{3}{2}(M+m)R^2\ddot{\theta} + mR(R+r)\ddot{\varphi}\left[\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\right] \\
&\quad + mR(R+r)\dot{\varphi}(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\cos(\theta-\varphi), \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{3}{2}m(R+r)^2\ddot{\varphi} + mR(R+r)\ddot{\theta}\left[\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\right] \\
&\quad + mR(R+r)\dot{\theta}(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\cos(\theta-\varphi).
\end{aligned}$$

Dopo alcune semplificazioni, le equazioni del moto sono

$$
\begin{aligned}
&\frac{3}{2}(M+m)R\ddot{\theta} + m(R+r)\ddot{\varphi}\left[\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\right] - m(R+r)\dot{\varphi}^2\cos(\theta-\varphi) = \\
&-(M+m)g\sin\theta, \\
&\frac{3}{2}m(R+r)\ddot{\varphi} + mR\ddot{\theta}\left[\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{2}\right] + mR\dot{\theta}^2\cos(\theta-\varphi) = -mg\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Soluzione terzo esercizio

i)
Scriviamo le coordinate di A e C:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_A &= (2\ell\sin\theta, -2\ell\cos\theta)^T,\\ \boldsymbol{\chi}_C &= (2\sqrt{2}\ell + 2\ell\sin\varphi, -2\ell\cos\varphi)^T.\end{aligned}$$

Abbiamo

$$|\boldsymbol{\chi}_A - \boldsymbol{\chi}_C|^2 = 16\ell^2 + 8\sqrt{2}l^2(\sin\varphi - \sin\theta) - 8\ell^2\cos(\theta-\varphi).$$

Quindi, dato che siamo in assenza di gravità, si ha semplicemente

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2}k|\boldsymbol{\chi}_A - \boldsymbol{\chi}_C|^2\\ &= k\ell^2\left[8 + 4\sqrt{2}(\sin\varphi - \sin\theta) - 4\cos(\theta-\varphi)\right].\end{aligned}$$

Per trovare gli equilibri risolviamo il sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = -4\sqrt{2}k\ell^2\cos\theta + 4k\ell^2\sin(\theta-\varphi) = 0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = 4\sqrt{2}k\ell^2\cos\varphi - 4k\ell^2\sin(\theta-\varphi) = 0.\end{cases}$$

Ricaviamo, per esempio,

$$4k\ell^2\sin(\theta-\varphi) = 4\sqrt{2}k\ell^2\cos\varphi \tag{2}$$

dalla seconda equazione del sistema. Sostituendo nella prima si ottiene

$$\cos\varphi = \cos\theta.$$

Abbiamo allora due possibilità: $\varphi = \theta$ oppure $\varphi = -\theta$. Se $\varphi = \theta$, dalla (2) si ottiene $\cos\theta = 0$ e allora si trovano le due configurazioni di equilibrio:

$$(\theta_1, \varphi_1) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (\theta_2, \varphi_2) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Se invece $\varphi = -\theta$, da (2) si ottiene

$$4k\ell^2\sin(2\theta) = 4\sqrt{2}k\ell^2\cos\theta,$$

che si può anche scrivere come

$$\cos\theta(8k\ell^2\sin\theta - 4\sqrt{2}k\ell^2) = 0.$$

Questa è soddisfatta se

$$\cos\theta = 0, \tag{3}$$

oppure se

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{4}$$

Da (3) ricaviamo

$$(\theta_3, \varphi_3) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \qquad (\theta_4, \varphi_4) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Da (4) ricaviamo invece

$$(\theta_5, \varphi_5) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right), \qquad (\theta_6, \varphi_6) = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right).$$

Abbiamo ottenuto quindi 6 configurazioni di equlibrio.

ii)
Calcoliamo la matrice delle derivate seconde $V''(\theta, \varphi)$ che ha componenti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= 4\sqrt{2}k\ell^2 \sin\theta + 4k\ell^2 \cos(\theta - \varphi), \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= -4\sqrt{2}k\ell^2 \sin\varphi + 4k\ell^2 \cos(\theta - \varphi), \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} &= -4k\ell^2 \cos(\theta - \varphi).
\end{aligned}$$

Consideriamo le 6 configurazioni di equilibrio.

- (θ_1, φ_1):

$$V''(\theta_1, \varphi_1) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2}k\ell^2 + 4k\ell^2 & -4k\ell^2 \\ -4k\ell^2 & -4\sqrt{2}k\ell^2 + 4k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

  Il determinante è negativo, quindi l'equilibrio è instabile.

- (θ_2, φ_2):

$$V''(\theta_2, \varphi_2) = \begin{bmatrix} -4\sqrt{2}k\ell^2 + 4k\ell^2 & -4k\ell^2 \\ -4k\ell^2 & 4\sqrt{2}k\ell^2 + 4k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

  Il determinante è negativo, quindi l'equilibrio è instabile.

- (θ_3, φ_3):

$$V''(\theta_3, \varphi_3) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2}k\ell^2 - 4k\ell^2 & 4k\ell^2 \\ 4k\ell^2 & 4\sqrt{2}k\ell^2 - 4k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

  Il determinante è negativo, quindi l'equilibrio è instabile.

- (θ_4, φ_4):

$$V''(\theta_4, \varphi_4) = \begin{bmatrix} -4\sqrt{2}k\ell^2 - 4k\ell^2 & 4k\ell^2 \\ 4k\ell^2 & -4\sqrt{2}k\ell^2 - 4k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

  Il determinante è positivo, ma la traccia è negativa, quindi l'equilibrio è instabile.

- (θ_5, φ_5) e (θ_6, φ_6):

$$V''(\theta_5, \varphi_5) = V''(\theta_6, \varphi_6) = \begin{bmatrix} 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & 4k\ell^2 \end{bmatrix}.$$

  Abbiamo due autovalori positivi quindi questi due equilibri sono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

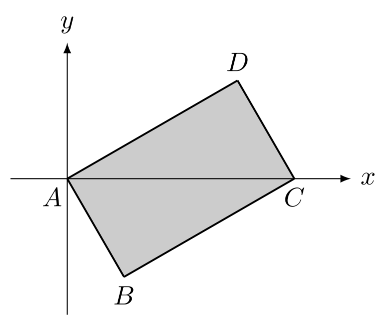
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

11 Settembre 2023

Primo Esercizio

Si consideri una lamina rettangolare omogenea $ABCD$ di massa m e lati $\overline{AB} = \overline{CD} = b$, $\overline{BC} = \overline{DA} = a$. Si fissi un sistema di riferimento $Axyz$ in modo che la lamina giaccia sul piano Axy, l'asse Ax passi per i vertici A, C e l'asse Ay sia orientato come si vede nella figura.



i) Calcolare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Ax e Ay.

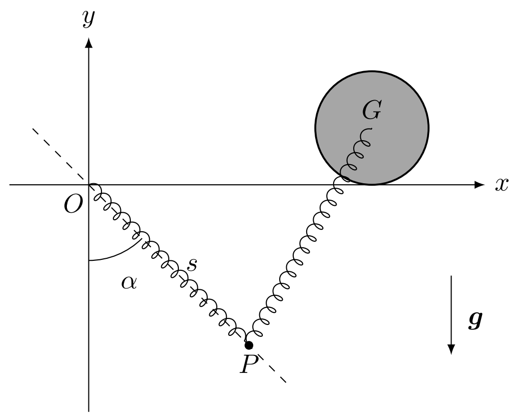
ii) Calcolare il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse passante per i vertici B e D.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy con l'asse Oy verticale ascendente. Un punto materiale P di massa m scivola lungo una guida rettilinea fissa passante per O ed inclinata di un angolo costante $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ rispetto all'asse Oy. Una molla collega P con O ed un'altra molla collega P al baricentro G di un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse Ox. Entrambe le molle hanno costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione uguale a g. Si assuma che i vincoli siano ideali.
Usando come parametri lagrangiani la coordinata x_G di G e l'ascissa s di P definita lungo la guida ($s > 0$ se la coordinata x di P è > 0),

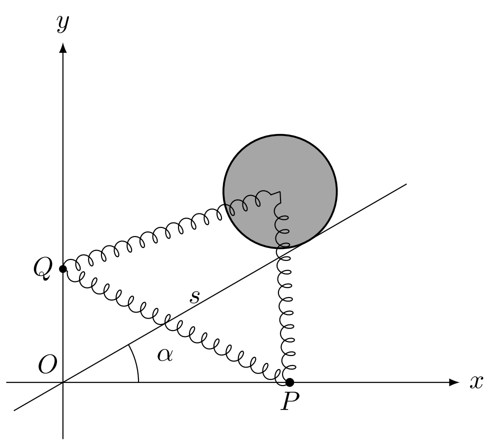
i) scrivere le equazioni pure del moto del sistema usando le equazioni cardinali della dinamica;

ii) determinare le espressioni delle reazioni vincolari che agiscono su P e sul disco in funzione delle costanti k, m, M, R, g, α e dei parametri lagrangiani x, s.



Terzo Esercizio

In un piano orizzontale (non agisce la forza di gravità) si introduca un sistema di riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P, Q, ciascuno di massa m, e da un disco di massa M. I punti P, Q scivolano lungo gli assi Ox, Oy, rispettivamente, ed il disco rotola senza strisciare lungo una guida fissa inclinata di un angolo costante $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ rispetto all'asse Ox. Ciascun punto materiale è collegato al centro del disco da una molla e una terza molla collega P a Q. Le tre molle hanno costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si assuma che i vincoli siano ideali.



Sia s l'ascissa del punto di contatto tra la guida ed il disco definita lungo la guida ($s > 0$ se la coordinata x del punto di contatto è > 0). Usando come parametri lagrangiani la coordinata x_P di P, la coordinata y_Q di Q ed s,

i) trovare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;

ii) determinare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni intorno alle configurazioni di equilibrio stabile trovate al punto i).

Soluzione primo esercizio

i)
Introduciamo un sistema di riferimento ausiliario $Ax'y'z$, con l'asse Ax' passante per i vertici A, D (orientato da A verso D) e l'asse Ay' passante per i vertici A, B (orientato da B verso A). I momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Ax' e Ay' sono noti:

$$I_{Ax'} = \frac{mb^2}{3}, \qquad I_{Ay'} = \frac{ma^2}{3}.$$

Dunque otteniamo subito

$$I_{Az} = I_{Ax'} + I_{Ay'} = \frac{m(a^2+b^2)}{3}.$$

Calcoliamo il momento di inerzia centrifugo

$$I_{x'y'} = -\sigma \int_0^a \int_{-b}^0 x'y' dx' dy' = \frac{mab}{4},$$

dove abbiamo usato $\sigma = m/(ab)$. Abbiamo allora ottenuto la matrice di inerzia rispetto al riferimento $Ax'y'z$:

$$I'_A = m \begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & \frac{ab}{4} & 0 \\ \frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix}$$

Introduciamo i versori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ associati agli assi Ax e Ay, rispettivamente, scritti in $Ax'y'z$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a, -b, 0)^T,$$
$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b, a, 0)^T.$$

I momenti di inerzia rispetto agli assi Ax e Ay si trovano come segue:

$$I_{Ax} = \mathbf{u} \cdot I'_A \mathbf{u} = \frac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)},$$
$$I_{Ay} = \mathbf{v} \cdot I'_A \mathbf{v} = m\frac{2(a^4+b^4)+3a^2b^2}{6(a^2+b^2)}.$$

ii)
Il momento di inerzia richiesto è uguale a I_{Ax}.

Soluzione secondo esercizio

i)
Introduciamo l'asse Oz in modo che $Oxyz$ sia un sistema di riferimento levogiro. Scriviamo le coordinate di P e G:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_P &= (s\sin\alpha, -s\cos\alpha, 0)^T,\\ \boldsymbol{\chi}_G &= (x_G, R, 0)^T.\end{aligned}$$

Le accelerazioni dei due punti risultano

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_P &= (\ddot{s}\sin\alpha, -\ddot{s}\cos\alpha, 0)^T,\\ \boldsymbol{a}_G &= (\ddot{x}_G, 0, 0)^T.\end{aligned}$$

Su P agiscono le seguenti forze:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_g &= (0, -mg, 0)^T,\\ \mathbf{F}_{\mathrm{el}}^{(1)} &= -k\boldsymbol{\chi}_P = k(-s\sin\alpha, s\cos\alpha, 0)^T,\\ \mathbf{F}_{\mathrm{el}}^{(2)} &= k(\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_P) = k(x_G - s\sin\alpha, R + s\cos\alpha, 0)^T,\\ \boldsymbol{\Phi}_P &= (\Phi\cos\alpha, \Phi\sin\alpha, 0)^T.\end{aligned}$$

La prima equazione cardinale della dinamica per P proiettata lungo Ox e Oy risulta

$$m\ddot{s}\sin\alpha = -ks\sin\alpha + k(x_G - s\sin\alpha) + \Phi\cos\alpha, \tag{1}$$
$$-m\ddot{s}\cos\alpha = -mg + ks\cos\alpha + k(R + s\cos\alpha) + \Phi\sin\alpha. \tag{2}$$

Moltiplicando i membri di (1) per $\sin\alpha$, quelli di (2) per $-\cos\alpha$ e sommando le due nuove equazioni, si ottiene la prima equazione pura del moto:

$$m\ddot{s} = -2ks + mg\cos\alpha + k(x_G\sin\alpha - R\cos\alpha).$$

Moltiplicando i membri di (1) per $\cos\alpha$, quelli di (2) per $\sin\alpha$ e sommando le due nuove equazioni, si ottiene

$$\Phi = mg\sin\alpha - k(x_G\cos\alpha + R\sin\alpha).$$

Occupiamoci ora del disco. Su di esso agiscono le seguenti forze:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_g^{(d)} &= (0, -Mg, 0)^T,\\ -\mathbf{F}_{\mathrm{el}}^{(2)} &= -k(\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_P) = -k(x_G - s\sin\alpha, R + s\cos\alpha, 0)^T,\\ \boldsymbol{\Phi} &= (\Phi_x, \Phi_y, 0)^T.\end{aligned}$$

La seconda equazione cardinale del disco rispetto al punto Q di contatto con l'asse Ox è data da

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q, \tag{3}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_Q &= \left(0, 0, -\frac{3MR}{2}\dot{x}_G\right)^T,\\ \mathbf{N}_Q &= (\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_Q) \times (-\mathbf{F}_{\mathrm{el}}^{(2)}) = (0, 0, kR(x_G - s\sin\alpha))^T\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\chi}_Q = (x_G, 0, 0)^T.$$

Proiettando (3) lungo Oz si ottiene la seconda equazione pura del moto:

$$-\frac{3}{2} M \ddot{x}_G = k(x_G - s \sin \alpha). \tag{4}$$

La prima equazione cardinale della dinamica per il disco proiettata lungo Ox e Oy risulta

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_G &= \Phi_x + k(s \sin \alpha - x_G), \\ 0 &= \Phi_y - Mg - k(R + s \cos \alpha). \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene subito

$$\Phi_y = Mg + k(R + s \cos \alpha).$$

Dalla prima equazione e da (4) si ha

$$\Phi_x = \frac{k}{3}(x_G - s \sin \alpha).$$

Soluzione terzo esercizio

i)
Chiamiamo G il centro del disco. Le posizioni dei punti P, Q, G sono

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_P &= (x_P, 0)^T,\\ \boldsymbol{\chi}_Q &= (0, y_Q)^T,\\ \boldsymbol{\chi}_G &= (s\cos\alpha - R\sin\alpha, s\sin\alpha + R\cos\alpha)^T.\end{aligned}$$

L'energia potenziale è data da

$$V(x_P, y_Q, s) = \frac{1}{2}k\left(|\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_P|^2 + |\boldsymbol{\chi}_G - \boldsymbol{\chi}_Q|^2 + |\boldsymbol{\chi}_P - \boldsymbol{\chi}_Q|^2\right).$$

Trascurando i termini costanti, risulta

$$V(x_P, y_Q, s) = k\left[x_P^2 + y_Q^2 + s^2 - s(x_P\cos\alpha + y_Q\sin\alpha) + R(x_P\sin\alpha - y_Q\cos\alpha)\right]$$

Per trovare gli equilibri risolviamo il sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x_P} = k(2x_P - s\cos\alpha + R\sin\alpha) = 0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial y_Q} = k(2y_Q - s\sin\alpha - R\cos\alpha) = 0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = k(2s - x_P\cos\alpha - y_Q\sin\alpha) = 0.\end{cases}$$

Dalle prime due equazioni otteniamo

$$x_P\cos\alpha + y_Q\sin\alpha = \frac{s}{2},$$

e sostituendo nella terza equazione si trova

$$s = 0.$$

Ponendo quindi $s = 0$ nelle prime due equazioni del sistema, troviamo la seguente configurazione di equilibrio

$$(\bar{x}_P, \bar{y}_Q, \bar{s}) = \left(-\frac{R}{2}\sin\alpha, \frac{R}{2}\cos\alpha, 0\right).$$

Per studiarne la stabilità calcoliamo la matrice delle derivate seconde $V''(x_P, y_Q, s)$ che ha componenti

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x_P^2} &= 2k,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_Q^2} &= 2k,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} &= 2k,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial s\partial x_P} &= -k\cos\alpha,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_Q\partial x_P} &= 0,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial s\partial y_Q} &= -k\sin\alpha.\end{aligned}$$

Si ha

$$V'' = k \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\cos\alpha \\ 0 & 2 & -\sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 2 \end{bmatrix}.$$

Notando che i minori principali di questa matrice sono

$$2k > 0, \qquad 4k^2 > 0, \qquad 6k^3 > 0,$$

possiamo concludere che l'unica configurazione di equilibrio del sistema è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

ii)
Dall'energia cinetica del sistema,

$$T(\dot{x}_P, \dot{y}_Q, \dot{s}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_Q^2\right) + \frac{3}{4} M \dot{s}^2,$$

otteniamo la matrice cinetica

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} M \end{bmatrix}.$$

L'equazione secolare

$$\det(V'' - \lambda A) = 0$$

diventa

$$(2k - \lambda m) \left[(2k - \lambda m) \left(2k - \lambda \frac{3}{2} M \right) - k^2 \right] = 0,$$

che ha come soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{2k}{m}, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{k}{3Mm} \left(3M + 2m \pm \sqrt{9M^2 + 4m^2 - 6Mm} \right).$$

Le frequenze proprie sono $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, 3$.