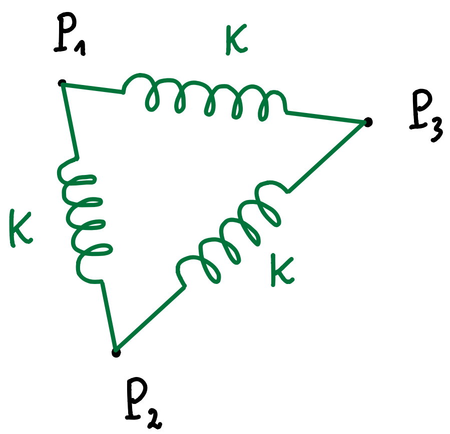
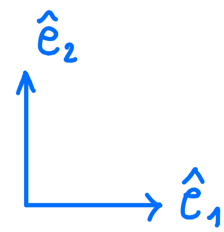
Esempio sulle forze interne

Consideriamo tre punti materiali collegati a due a due da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla





$$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$$

l'energia potenziale delle forze interne è

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(\rho_{ij}(\vec{x}))$$

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}, \quad \vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N),$$

$\vec{x}_j$ è la posizione del punto j-esimo

possiamo anche scrivere

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(\rho_{ij}(\vec{x}))$$

Nel nostro caso $N = 3$

$$V^{(I)}(x) = V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + V_{23}(\rho_{23}(\vec{x}))$$

$\longrightarrow$ se usiamo la formula

con $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

oppure

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\Big[V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + V_{21}(\rho_{23}(\vec{x})) + V_{23}(\rho_{23}(\vec{x})) + V_{31}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{32}(\rho_{13}(\vec{x})) \Big]$$

se usiamo la formula

notando che $\rho_{12} = \rho_{21}$, $\rho_{13} = \rho_{31}$, $\rho_{23} = \rho_{32}$ si ha $V_{ij} = V_{ji}$ e questa formula diventa uguale alla precedente:

$$V^{(I)}(x) = \frac{1}{2}\Big[2V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + 2V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + 2V_{23}(\rho_{23}(\vec{x})) \Big]$$

$$= V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + V_{23}(\rho_{23}(\vec{x}))$$

Calcoliamo ora la forza risultante delle forze interne che agisce su ciascun punto

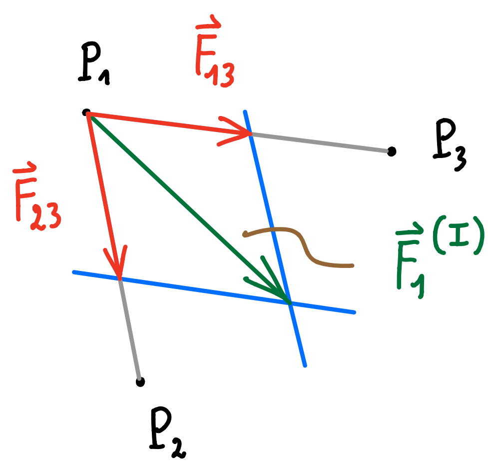
$$\vec{F}_k^{(I)} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}_{kj} \qquad K = 1, \dots, N$$

Sappiamo che vale la relazione

$$\vec{F}_k^{(I)} = - \nabla_{\vec{x}_k} V^{(I)} = - \left(\frac{\partial V^{(I)}}{\partial x_k}, \frac{\partial V^{(I)}}{\partial y_k}, \frac{\partial V^{(I)}}{\partial z_k} \right)^T$$

$$\vec{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$$

Prendiamo P_1



1 $$\vec{F}_1^{(I)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

inoltre

2 $$\vec{F}_1^{(I)} = - \nabla_{\vec{x}_1} V^{(I)}$$

Voglio verificare che 1 e 2 ci danno lo stesso risultato

$$V^{(I)}(\vec{x}) = V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + V_{23}(\rho_{23}(\vec{x}))$$

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\rho_{12}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}k\rho_{13}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2}k\rho_{23}^2(\vec{x})$$

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\left[\overbrace{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2}^{=\rho_{12}^2} + \overbrace{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^2}^{=\rho_{13}^2} + \underbrace{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^2}_{=\rho_{23}^2}\right]$$

verificate questo passaggio

$$\nabla_{\vec{x}_1} V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{\cancel{2}}k\left[\cancel{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + \cancel{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)\right]$$

$$= k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + k(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)$$

quindi $\vec{F}_1^{(I)} = -k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - k(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)$

Ora usiamo invece la formula

$$\vec{F}_1^{(I)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

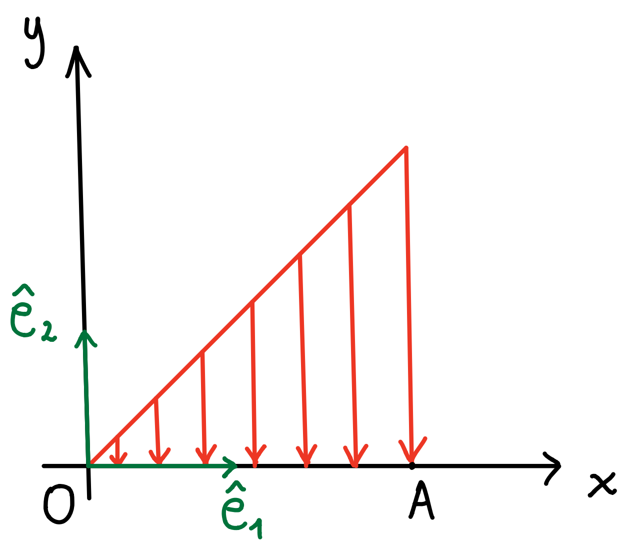
dove le forze elastiche esercitate su P_1 prendono la forma

$$\vec{F}_{12} = k(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \quad \vec{F}_{13} = k(\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$$

Si è visto allora che

$$\nabla_{\vec{x}_1} V^{(I)} = -\vec{F}_{12} - \vec{F}_{13} = -\vec{F}_1^{(I)}$$

Calcolo del centro dei vettori paralleli per una distribuzione continua di forze



$$\vec{f}(x) = -f_0 \frac{x}{\ell}\,\hat{e}_2$$

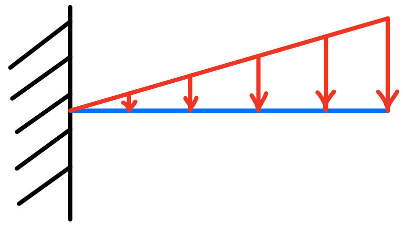
$$(f_0 > 0)$$

f_0 è una forza per unità di lunghezza

$|O - A| = \ell$

notiamo che $\vec{f}(0) = \vec{0}$ e $\vec{f}(\ell) = -f_0\,\hat{e}_2$

Avrete spesso a che fare con carichi distribuiti e uno dei primi esempi che incontrerete è la trave incastrata e sottoposta ad un carico distribuito



Vogliamo trovare un sistema di forze equivalente a quello dato.

Poichè il trinomio invariante è nullo dato che il sistema è piano, un sistema equivalente è

$$\{(\vec{R}, C)\}$$

con $\vec{R}$ la risultante delle forze e C il centro dei vettori paralleli

Calcoliamo $\vec{R}$

$$\vec{R} = \int_0^{\ell} -f_0 \frac{x}{\ell} \hat{e}_2 \, dx =$$

$$-\frac{f_0}{\ell}\left(\int_0^{\ell} x \, dx\right)\hat{e}_2 = -\frac{f_0}{\ell}\frac{1}{2}\ell^2 \hat{e}_2$$

$$= -\frac{f_0 \ell}{2}\hat{e}_2 = \vec{R}$$

Calcoliamo la posizione del centro dei vettori paralleli. Ricordiamo prima la formula per il caso discreto

$$C - O = \frac{1}{\underbrace{\sum_{j=1}^{N} v_j}_{= \vec{R}\cdot\hat{e}}} \sum_{j=1}^{N} (P_j - O)\, v_j$$

$$\vec{v}_j = v_j \hat{e}$$

infatti $\vec{R} = \sum_{j=1}^{N} \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{N} v_j \hat{e} = \left(\sum_{j=1}^{N} v_j\right)\hat{e}$

Nel caso di una distribuzione continua la formula diventa

$$C - O = \frac{1}{\vec{R}\cdot\hat{e}_2} \int_0^{\ell} (x\,\hat{e}_1) \underbrace{\left(-f_0 \frac{x}{\ell}\right)}_{= \vec{f}\cdot\hat{e}_2} dx$$

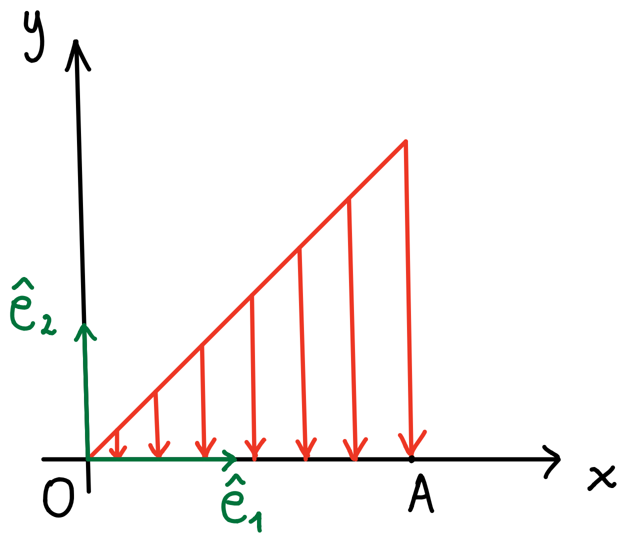
$$\vec{R}\cdot\hat{e}_2 = \left(-\frac{f_0 \ell}{2}\right)\hat{e}_2\cdot\hat{e}_2 = -\frac{f_0 \ell}{2}$$

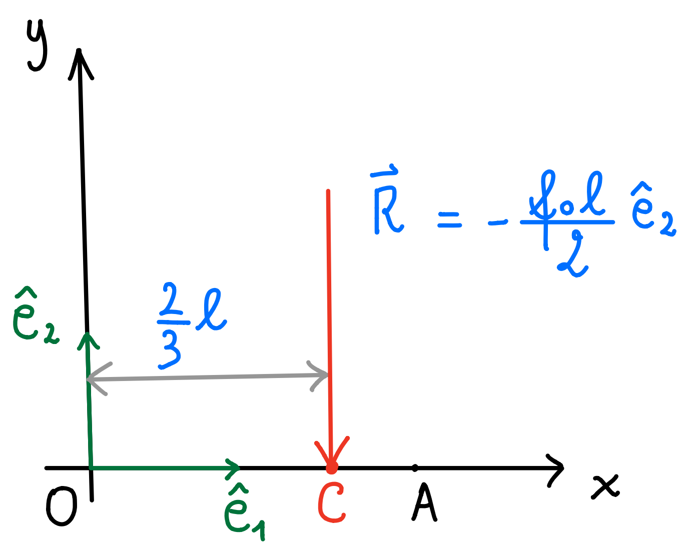
risolviamo separatamente l'integrale

$$\int_0^\ell (x\,\hat{e}_1)\left(-f_0\frac{x}{\ell}\right)dx = -\frac{f_0}{\ell}\left(\int_0^\ell x^2\,dx\right)\hat{e}_1$$

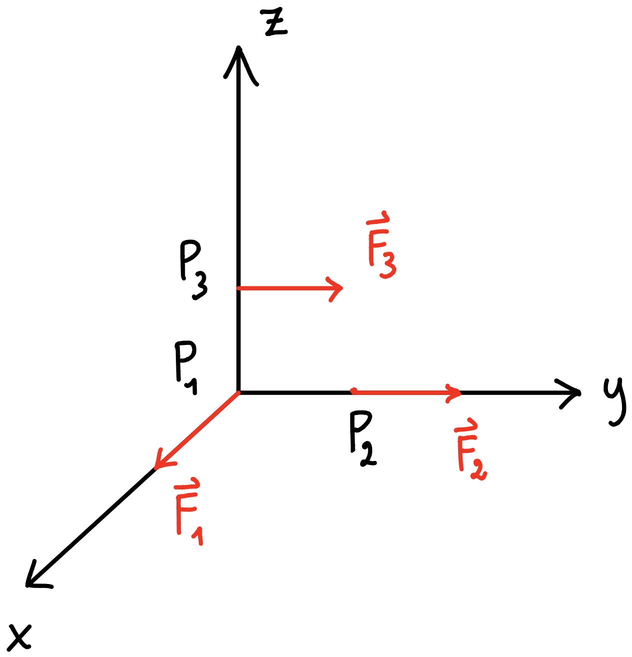
$$= -\frac{f_0}{\ell}\,\frac{1}{3}\,\ell^3\,\hat{e}_1 = -\frac{f_0\ell^2}{3}\,\hat{e}_1$$

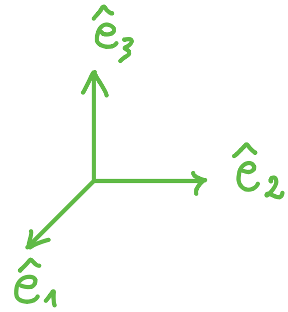
$$C - O = \frac{1}{-\frac{f_0\ell}{2}}\left(-\frac{f_0\ell^2}{3}\right)\hat{e}_1 = \frac{2}{3}\ell\,\hat{e}_1$$





Esercizio





$P_1 - O = \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{F}_1 = a\,\hat{e}_1$

$P_2 - O = \hat{e}_2$ $\qquad$ $\vec{F}_2 = a\,\hat{e}_2$

$P_3 - O = \hat{e}_3$ $\qquad$ $\vec{F}_3 = a\,\hat{e}_2$

$a > 0$

trovare l'asse centrale

Sol.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = a\,\hat{e}_1 + 2a\,\hat{e}_2$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{5}\,a$$

Introduciamo un punto A generico

$$A - O = x\,\hat{e}_1 + y\,\hat{e}_2 + z\,\hat{e}_3$$

e imponiamo la condizione che appartenga all'asse centrale, cioè

$$\vec{M}_A \times \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A = (P_1 - A) \times \vec{F}_1 + (P_2 - A) \times \vec{F}_2 + (P_3 - A) \times \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_A = (-x\,\hat{e}_1 - y\,\hat{e}_2 - z\,\hat{e}_3) \times a\,\hat{e}_1 +$$

$$(-x\,\hat{e}_1 + (1-y)\,\hat{e}_2 - z\,\hat{e}_3) \times a\,\hat{e}_2 +$$

$$(-x\,\hat{e}_1 - y\,\hat{e}_2 + (1-z)\,\hat{e}_3) \times a\,\hat{e}_2$$

$$= y a\,\hat{e}_3 - z a\,\hat{e}_2 - x a\,\hat{e}_3 + z a\,\hat{e}_1$$

$$- x a\,\hat{e}_3 - (1-z) a\,\hat{e}_1$$

$$= a(2z-1)\,\hat{e}_1 - z a\,\hat{e}_2 + a(y-2x)\,\hat{e}_3$$

ricordiamo che

$$\vec{R} = a\,\hat{e}_1 + 2a\,\hat{e}_2$$

$$\vec{M}_A \times \vec{R} = \left[a(2z-1)\,\hat{e}_1 - z a\,\hat{e}_2 + a(y-2x)\,\hat{e}_3\right] \times$$

$$(a\,\hat{e}_1 + 2a\,\hat{e}_2) =$$

$$2a^2(2z-1)\,\hat{e}_3 + a^2 z\,\hat{e}_3 + a^2(y-2x)\,\hat{e}_2$$

$$-2a^2(y-2x)\,\hat{e}_1 = \vec{0}$$

proiettiamo lungo $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

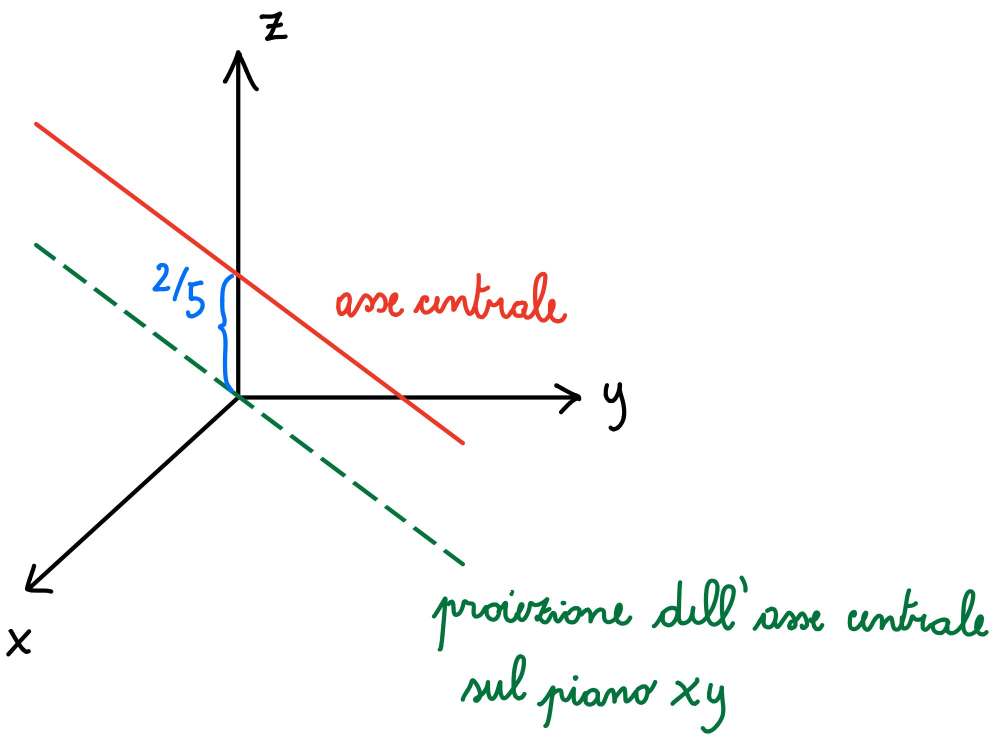
$\hat{e}_1: \quad -2a^2(y-2x) = 0$

$\hat{e}_2: \quad a^2(y-2x) = 0$

$\hat{e}_3: \quad 5a^2 z - 2a^2 = 0$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 5z = 2 \longrightarrow z = 2/5 \end{cases}$$

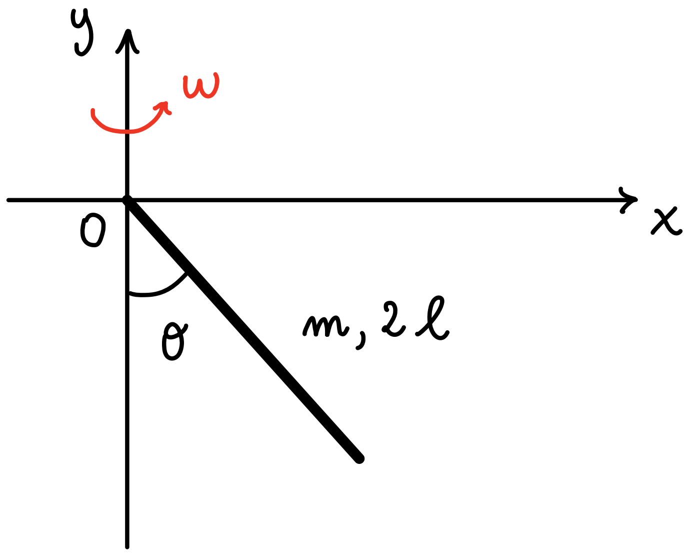
l'intersezione di questi due piani ci dà l'asse centrale



Questa nota è su argomenti di diverso tipo.
Gli esempi 24 e 30 che menziono fanno riferimento alle note del prof. Gronchi

---

Esempio 24 delle note



Mostrare che il sistema delle forze centrifughe è equivalente al sistema

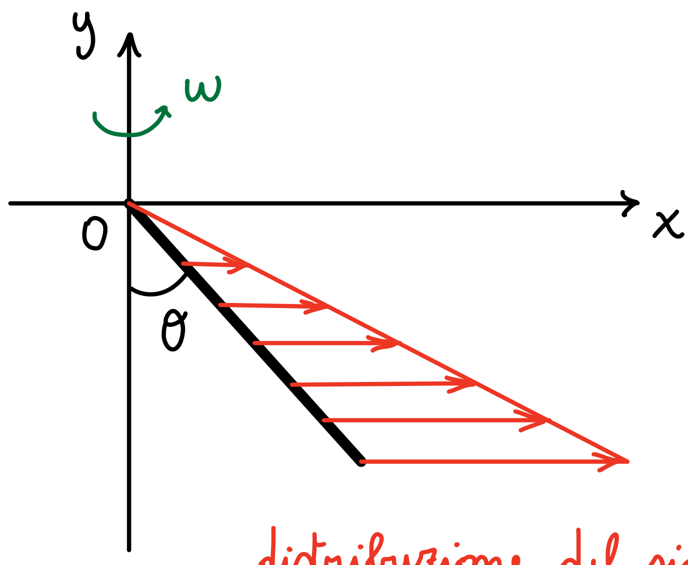
$$\{(\vec{R}, Q^*)\}$$

$\vec{R}$: risultante delle forze

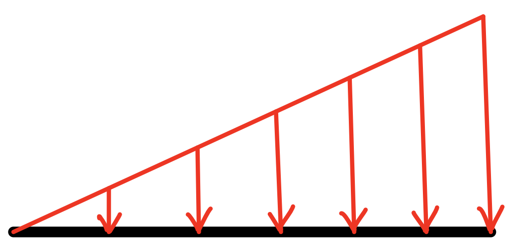
Q^*: punto di intersezione tra l'asta e l'asse centrale

Sol.

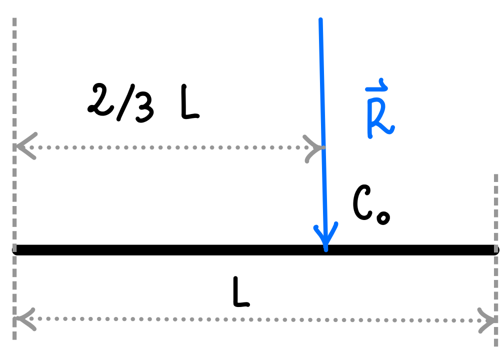
Calcoliamo la posizione del centro dei vettori paralleli



Abbiamo già visto che un sistema di forze equivalente al seguente

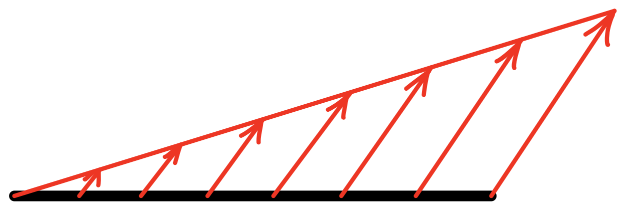


è dato dalla risultante applicata nel centro dei vettori paralleli C_0

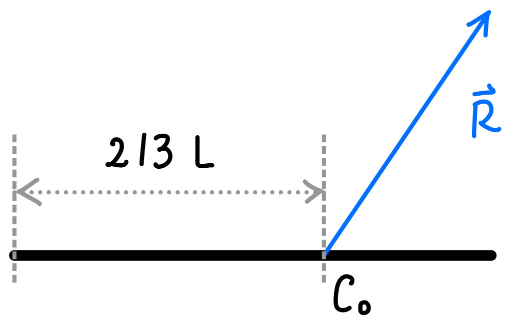


La posizione di C_0 non varia se cambiamo la direzione del sistema di vettori applicati.

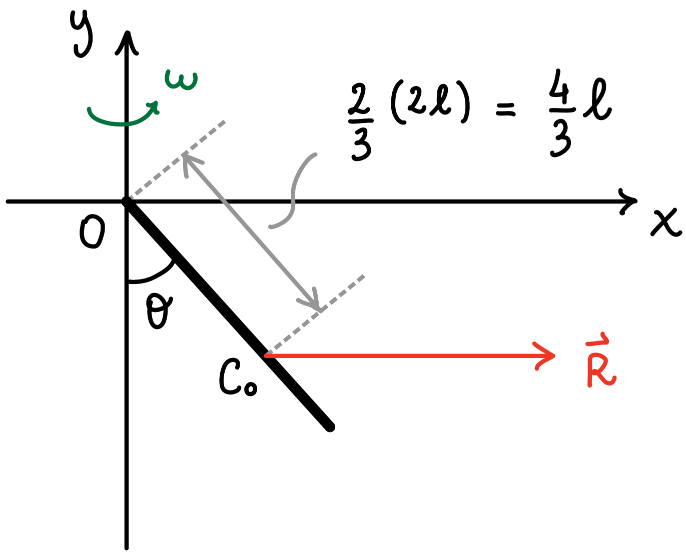
Quindi possiamo sostituire il sistema



con



Tornando al nostro esempio, in base a quanto mostrato, possiamo dire che il sistema delle forze centrifughe è equivalente a



dove $\vec{R}$ è la risultante (vedi note)

$$\vec{R} = m\omega^2 l \operatorname{sen}\theta \, \hat{e}_1$$

Dimostriamo che effettivamente la posizione di C_0 è quella che abbiamo detto

La formula per calcolare C_0 nel caso di un sistema discreto di forze applicate diventa

$$\vec{X}_{C_0}(\theta) = \frac{1}{\vec{R}\cdot\hat{e}_1} \int_0^{2l} \left(\vec{f}(\theta;s)\cdot\hat{e}_1\right)\vec{X}(\theta;s)\,ds$$

con (vedi note dove si usa r al posto di s)

$$\vec{f}(\theta;s) = \lambda\omega^2 s \operatorname{sen}\theta \, \hat{e}_1$$

$$\vec{X}(\theta;s) = s\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_1 - s\cos\theta\,\hat{e}_2$$

$$\vec{X}_{C_0}(\theta) = \frac{1}{m\omega^2 l \operatorname{sen}\theta} \int_0^{2l} \lambda\omega^2 s \operatorname{sen}\theta \, (s\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_1$$

$$- s\cos\theta\,\hat{e}_2)\,ds$$

$$= \frac{\lambda \omega^2 \operatorname{sen}\theta}{m \omega^2 \ell \operatorname{sen}\theta} (\operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1 - \cos\theta\, \hat{e}_2) \int_0^{2\ell} s^2\, ds$$

$$= \frac{\lambda}{m\ell} (\operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1 - \cos\theta\, \hat{e}_2)\ \frac{1}{3} 8\ell^3$$

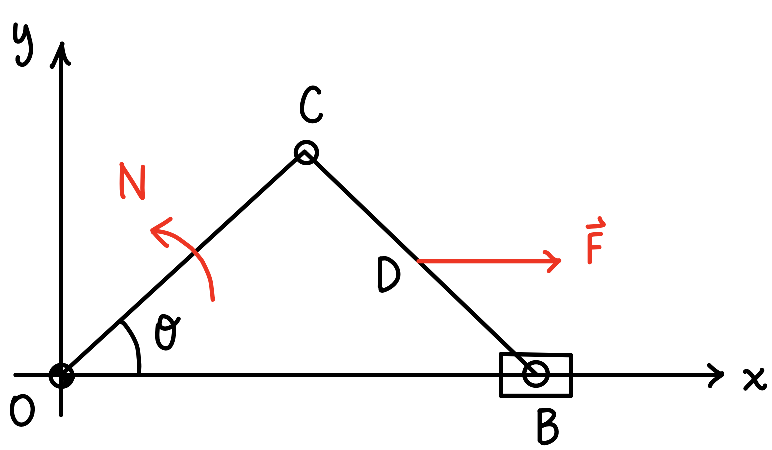
$$= \frac{4}{3}\ell\, (\operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_1 - \cos\theta\, \hat{e}_2)$$

Esercizio 30 delle note

Basta porre $\vec{N}_B = \vec{0}$, infatti essendo il sistema di vettori applicati piano, per qualunque punto Q dell'asse centrale deve essere

$$\vec{N}_Q = \vec{0}$$

3° esercizio dell'appello dell'8 gennaio 2019



i) determinare le configurazioni di equilibrio con il PLV

Sol.

Ricordiamo che per un corpo rigido il PLV assume la forma

$$\vec{R}^{(a)} \cdot \delta \vec{X}_Q + \vec{N}_Q \cdot \vec{\omega}\, dt = 0$$

Asta OC

azione dell'asta CB sull'asta OC

1 $$\vec{\Phi}_C^{2-1} \cdot \delta \vec{X}_C + \vec{N} \cdot (\dot{\theta}\, \hat{e}_3)\, dt = 0$$

Asta CB

$$- \vec{\Phi}_C^{2-1} \cdot \delta \vec{X}_C + \vec{F} \cdot \delta \vec{X}_C +$$

$$[(\vec{X}_D - \vec{X}_C) \times \vec{F}] \cdot (-\dot{\theta}\, \hat{e}_3)\, dt = 0$$

noto che

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{X}_C + [(\vec{X}_D - \vec{X}_C) \times \vec{F}] \cdot (-\dot{\theta}\, \hat{e}_3)\, dt =$$

$$\vec{F} \cdot \left(\delta \vec{X}_C + (-\dot{\theta}\, \hat{e}_3) \times (\vec{X}_D - \vec{X}_C) \right) =$$

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{X}_D$$

allora per l'asta CB si ha

$$② \quad -\vec{\Phi}_C^{2-1} \cdot \delta \vec{X}_C + \vec{F} \cdot \delta \vec{X}_D = 0$$

Sommando le due equazioni ① e ② si ottiene

$$\vec{N} \cdot (\dot{\theta}\, \hat{e}_3)\, dt + \vec{F} \cdot \delta \vec{X}_D = 0 \qquad \forall\, \delta\theta$$

$$\vec{X}_D = 3\ell \cos\theta\, \hat{e}_1 + \ell \,\text{sen}\,\theta\, \hat{e}_2$$

$$\delta \vec{X}_D = (-3\ell \,\text{sen}\,\theta\, \hat{e}_1 + \ell \cos\theta\, \hat{e}_2)\, \delta\theta$$

$$\vec{N} = N\hat{e}_3 \qquad \dot{\theta}\, dt = \delta\theta \qquad \vec{F} = F\hat{e}_1$$

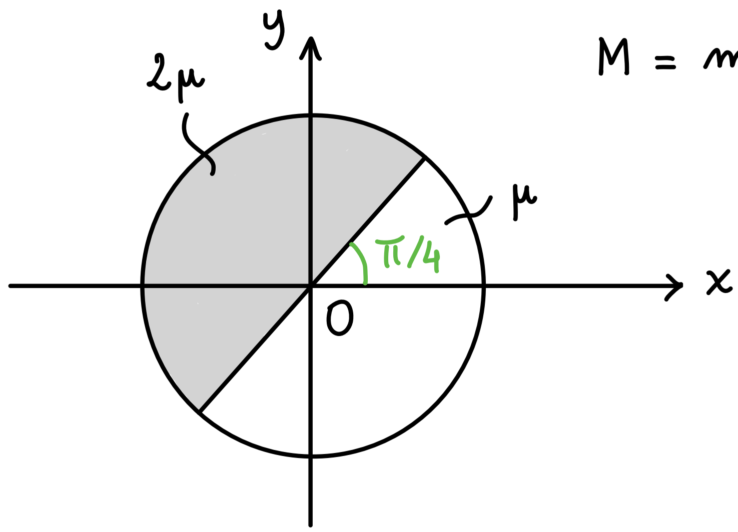
$$N\,\delta\theta - 3F\ell \,\text{sen}\,\theta\, \delta\theta = 0$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{N}{3F\ell}$$

se $N \leq 3F\ell$ allora

$$\theta_1 = \text{arcsen}\,\frac{N}{3F\ell}\,, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1$$

2° esercizio dell'appello del 25 giugno 2019

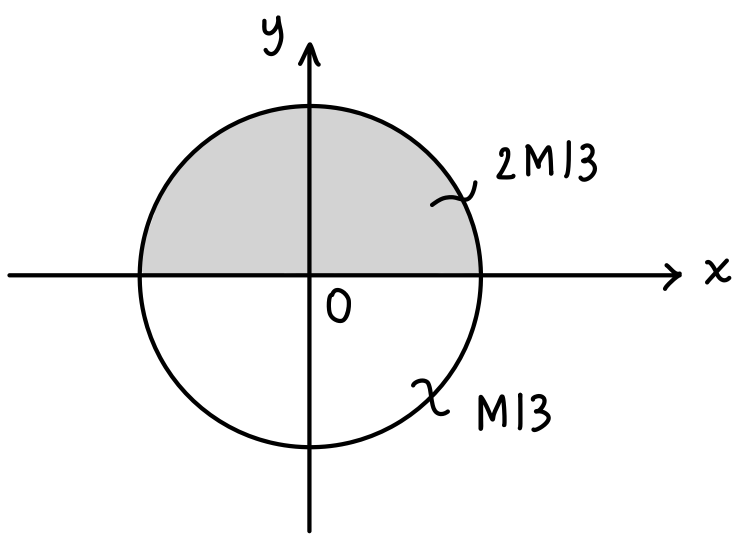


M = massa totale

i) Calcolare la matrice di inerzia I_O del disco nel riferimento $Oxyz$

Sol.

$I_{O,\hat{e}_1}$: ci si può ricondurre al caso



mom. d'in. del semidisco di massa $M/3$ rispetto ad Ox :

$$\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{M}{3}\right)\frac{R^2}{4}\right] = \frac{MR^2}{12}$$

mom. d'in. del semidisco di massa $2M/3$ rispetto ad Ox:

$$2\left(\frac{MR^2}{12}\right) = \frac{MR^2}{6}$$

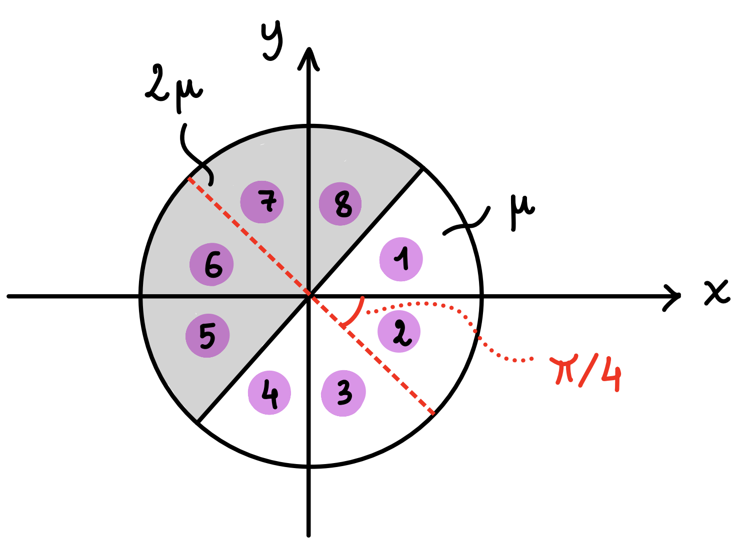
Allora

$$I_{O,\hat{e}_1} = \frac{MR^2}{12} + \frac{MR^2}{6} = \frac{MR^2}{4}$$

Con un procedimento analogo si trova

$$I_{O,\hat{e}_2} = \frac{MR^2}{4}$$

Vediamo infine il mom. d'in. centrifugo



i contributi di

$$1,\ 3,\ 5,\ 7$$

sono opposti ai contributi di

$$2,\ 4,\ 6,\ 8$$

rispettivamente

Concludo che $I_{12} = 0$

La matrice I_0 è data da

$$I_0 = MR^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

dove $I_{0,\hat{e}_3} = 2\, I_{0,\hat{e}_1} = \dfrac{MR^2}{2}$