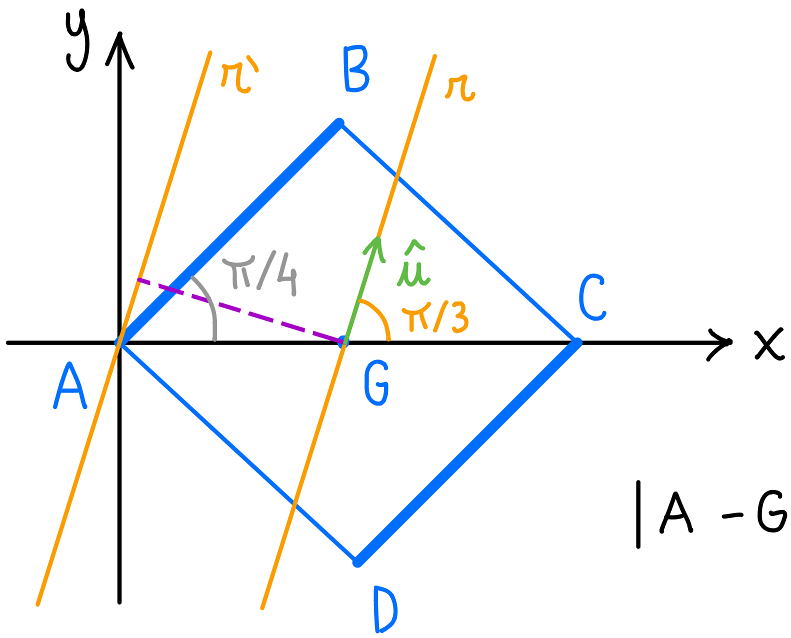
Continuazione dell'ultimo esercizio



$$|A - G| = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

ii) Trovare il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una retta passante per il suo baricentro e inclinata di $\pi/3$ rispetto all'asse Ax

Sol.

Avevamo calcolato al punto i) la matrice di inerzia I_A usando il sistema di riferimento $Axyz$

$$I_A = \frac{m\ell^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

con m massa del corpo rigido

Per rispondere alla domanda prima calcoliamo il momento di inerzia rispetto ad una retta parallela ad r e passante per A, indicata con r'

introduciamo un vettore unitario che ha la stessa direzione di r

$$\hat{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)^T$$

$$I_{A,\hat{u}} = \hat{u} \cdot I_A \hat{u} ,$$

$$I_{A,\hat{u}} = \frac{ml^2}{6} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{ml^2}{6} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 + \sqrt{3}/12 \\ 1/12 + 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ml^2}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{\sqrt{3}}{24} + 3 \right)$$

$$= \frac{ml^2}{6} \left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{ml^2}{24} \left(13 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Usiamo il teorema di Huygens-Steiner

$$I_{G,\hat{u}} = I_{A,\hat{u}} - md^2$$

dove d è la distanza tra r e r'

$$d = |A - G| \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = l \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = l \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$I_{G,\hat{u}} = \frac{m\ell^2}{24}\left(13 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - m\frac{\ell^2 6}{16}$$

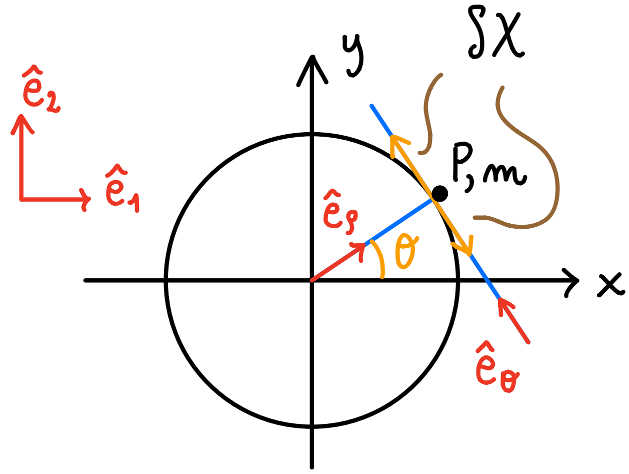
$$= m\ell^2\left(\frac{13}{24} - \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{72}\right)$$

$$= \frac{m\ell^2}{6}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$$

SPOSTAMENTI VIRTUALI

$\longrightarrow$ definizione (vedere a pagina 150 delle note)

Esempio



punto materiale che si sposta su una guida circolare di raggio R

il numero di gradi di libertà è $n = 1$

introduciamo $q = \theta$

posizione del punto

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \longrightarrow X(\theta) = (R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta)^T$$

spostamento virtuale $\delta X(\theta) = \dfrac{\partial X}{\partial \theta}\delta\theta$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta}\,\delta\theta = (-R\,\text{sen}\,\theta,\, R\cos\theta)^T \delta\theta$$

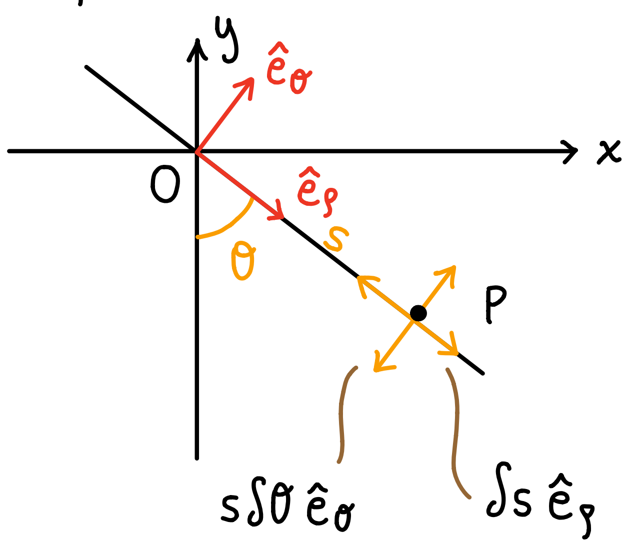
$$\delta X(\theta) = (-R\,\text{sen}\,\theta,\, R\cos\theta)^T \delta\theta$$

introdotti $\quad e_\rho = (\cos\theta,\, \text{sen}\,\theta)^T$

$\quad e_\theta = (-\text{sen}\,\theta,\, \cos\theta)^T$

si ha $\quad \delta X(\theta) = R\,\delta\theta\, e_\theta$ (si veda la figura)

Esempio



punto materiale che si sposta lungo una guida rotante sul piano attorno al suo punto fisso O

introduciamo

$\quad e_\rho = (\text{sen}\,\theta,\, -\cos\theta)^T$

$\quad e_\theta = (\cos\theta,\, \text{sen}\,\theta)^T$

il numero di gradi di libertà è $n = 2$

usiamo le coordinate lagrangiane $q = (s, \theta)^T$

s è l'ascissa del punto materiale lungo l'asta

$$X(s,\theta) = (s \operatorname{sen}\theta, -s\cos\theta)^T$$

$$\delta X(s,\theta) = \frac{\partial X}{\partial(s,\theta)}\begin{pmatrix}\delta s\\ \delta\theta\end{pmatrix}$$

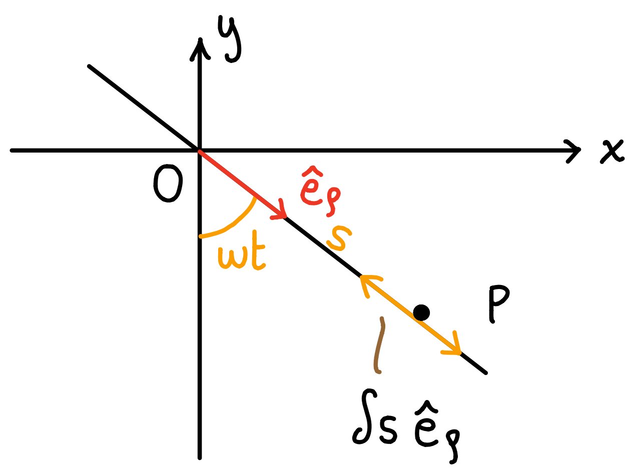
$$= \begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta & s\cos\theta\\ -\cos\theta & s\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta s\\ \delta\theta\end{pmatrix}$$

$$\delta X(s,\theta) = (\delta s \operatorname{sen}\theta + s\,\delta\theta\cos\theta,$$
$$-\delta s\cos\theta + s\,\delta\theta\operatorname{sen}\theta)^T$$

$$= \delta s\, e_\rho + s\,\delta\theta\, e_\theta$$ (si veda il disegno)

Esempio

Nei due esempi precedenti X non dipende esplicitamente dal tempo; vediamo un caso in cui dipende dal tempo



consideriamo l'esempio precedente in cui $\theta = wt$, con w costante

allora $x_P = s\operatorname{sen}(wt)$, $y_P = -s\cos(wt)$

in questo caso $n = 1$ e $q = s$

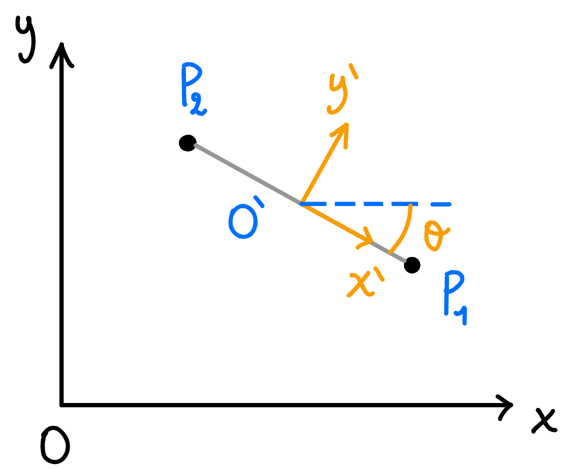
$$X(s) = (s \operatorname{sen}(\omega t), -s \cos(\omega t))^T$$

$$\delta X(s) = (\delta s \operatorname{sen}(\omega t), -\delta s \cos(\omega t))^T$$

caso del corpo rigido

(vedere alle pagine 150 - 152 delle note)

Esempio (caso in cui un corpo sia soggetto al solo vincolo di rigidità, formula 7.24)



$|P_1 - P_2| = \ell$

il corpo rigido è costituito da due punti materiali vincolati a rimanere alla stessa distanza ℓ

prendiamo un punto O' solidale al corpo : O' è il punto medio di $P_1 P_2$

introduciamo il riferimento solidale al corpo O'x'y'

questo corpo ha $n = 3$ gradi di libertà, e le sue possibili configurazioni sono individuate da

$$q = (x_{O'}, y_{O'}, \theta)^T$$

per P_1 si ha

$$X_{P_1}(x_{O'}, y_{O'}, \theta) = (x_{O'}, y_{O'})^T + R(\theta)\begin{pmatrix} \ell/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

matrice di rotazione da $O'x'y'$ a $O'xy$

$$X_{P_1} = \begin{pmatrix} x_{O'} + \frac{\ell}{2}\cos\theta \\ y_{O'} - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$\delta X_{P_1} = \frac{\partial X_{P_1}}{\partial(x_{O'}, y_{O'}, \theta)}\delta q$$

$$\delta X_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & -\frac{\ell}{2}\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta x_{O'} \\ \delta y_{O'} \\ \delta\theta \end{pmatrix}$$

$$\delta X_{P_1} = \begin{pmatrix} \delta x_{O'} - \frac{\ell}{2}(\operatorname{sen}\theta)\delta\theta \\ \delta y_{O'} - \frac{\ell}{2}(\cos\theta)\delta\theta \end{pmatrix}$$

oppure possiamo usare la formula 7.24

$$\delta X_{P_1} = dx_{0'} + \omega dt \times (X_j - x_{0'})$$

con $x_{0'} = (x_{0'}, y_{0'}, 0)^T$

$$\omega dt = (0, 0, -\dot{\theta})^T dt = (0, 0, -d\theta)^T$$

$$X_j - x_{0'} = R(\theta)\, x'_j$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x'_j = \begin{pmatrix} l/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

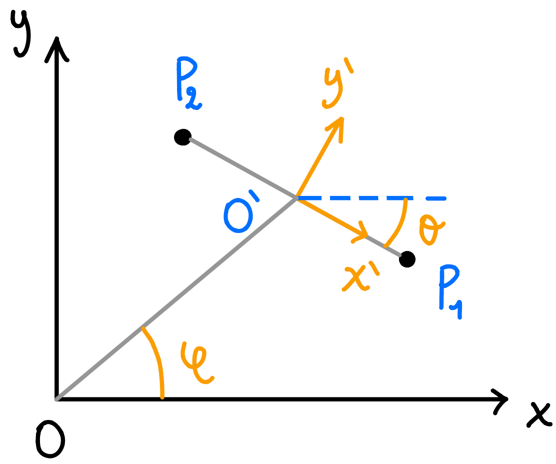
$$\omega dt \times (X_j - x_{0'}) = -\left(\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta, \frac{l}{2}\cos\theta, 0\right)^T d\theta$$

$$\delta X_{P_1} = \begin{pmatrix} \delta x_{0'} - \frac{l}{2}(\operatorname{sen}\theta)\,\delta\theta \\ \delta y_{0'} - \frac{l}{2}(\cos\theta)\,\delta\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo sostituito $d\theta, dx_{0'}, dy_{0'}$ con $\delta\theta, \delta x_{0'}, \delta y_{0'}$ (dato che i vincoli sono fissi)

Esempio (caso in cui il corpo è soggetto al vincolo di rigidità e ad altri vincoli, formula 7.25)

Consideriamo l'esempio precedente e imponiamo che la distanza di O' da O rimanga costante



$$|P_1 - P_2| = \ell$$

$$|O' - O| = R$$

in questo caso il numero di gradi di libertà è $n = 2$, e introdotto l'angolo φ come in figura, poniamo

$$q = (\varphi, \theta)^T$$

poichè vogliamo usare la formula 7.25 per trovare δX_{P_1}, nella quale compare $w = (0, 0, -\dot{\theta})^T$, scriviamo dei vettori in $\mathbb{R}^3$

si ha

$$X_{O'}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\,\mathrm{sen}\,\varphi, 0)^T$$

$$\delta X_{O'} = \frac{\partial X_{O'}}{\partial(\varphi,\theta)}\delta q = \begin{pmatrix} -R\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0 \\ R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\theta \end{pmatrix} =$$

$$(-R\,\mathrm{sen}\,\varphi, R\cos\varphi, 0)^T \delta\varphi$$

$$\omega dt \times (x_j - x_{0'}) = -\left(\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta,\ \frac{\ell}{2}\cos\theta,\ 0\right)^T d\theta$$

$$\delta x_{P_1} = \delta x_{0'} + \omega dt \times (x_j - x_{0'})$$

$$= \begin{pmatrix} -R\operatorname{sen}\varphi\,\delta\varphi - \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta \\ R\cos\varphi\,\delta\varphi - \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\delta\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

caso del puro rotolamento

(vedere a pagina 152 delle note)

caso delle coppie cinematiche

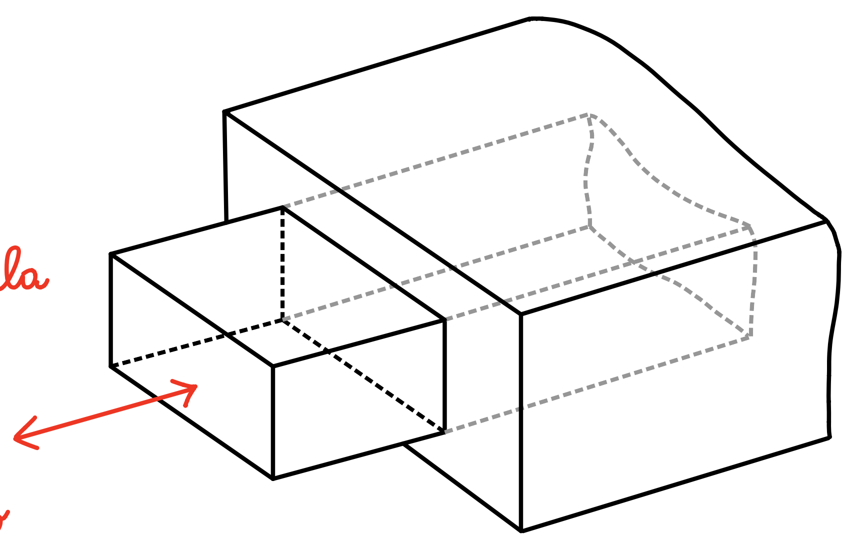
(vedere alle pagine 138 - 139 e 152 delle note)

non ho fatto la coppia elicoidale

qui mi limito a disegnare le coppie

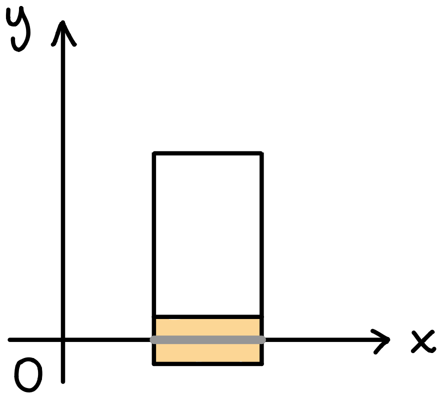
a) coppia prismatica

direzione di traslazione, è parallela alle generatrici della superficie cilindrica di contatto



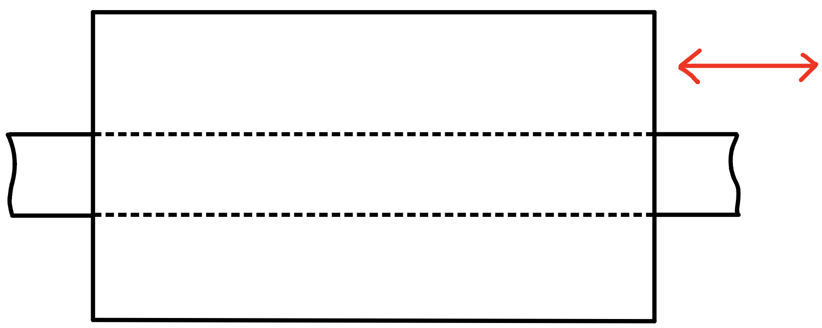
incontreremo spesso queste coppie

negli esercizi, ad esempio



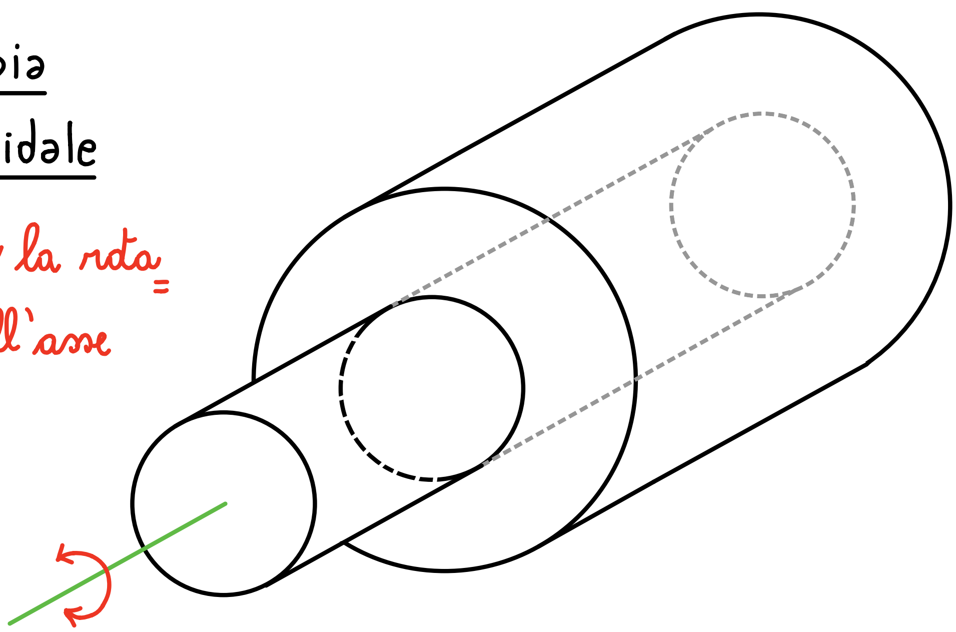
in arancione è indicata la coppia prismatica che consente al corpo di traslare lungo l'asse Ox

il segmento grigio schematizza la superficie di contatto, ecco un ingrandimento



b) <u>coppia rotoidale</u>

è permessa solo la rotazione attorno all'asse della superficie cilindrica di contatto

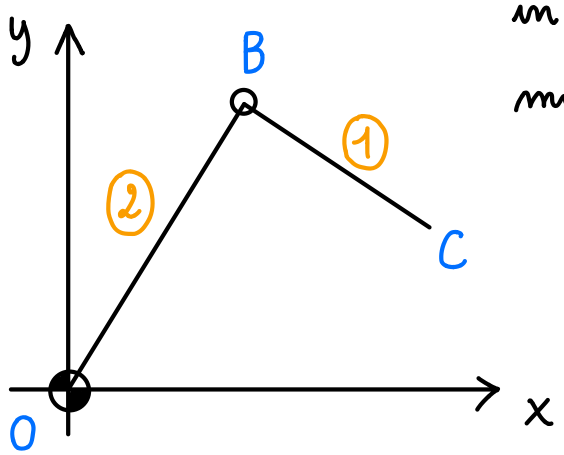


anche questo è un vincolo che si incontrerà molto spesso negli esercizi, e comparirà in due forme

1) coppia rotoidale fissa, indicata con

2) coppia rotoidale mobile, indicata con

ad esempio



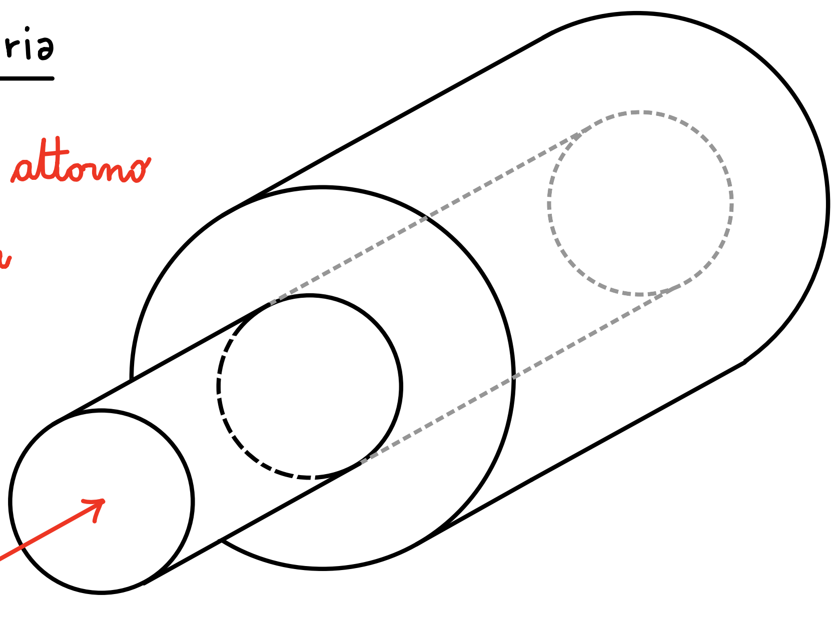
in B c'è una coppia rotoidale mobile, e in O una coppia rotoidale fissa

in entrambi i casi l'asse della coppia è perpendicolare al piano

la coppia in B permette le rotazioni (indipendenti tra loro) di 1 e 2, la coppia in O permette la rotazione dell'asta 2

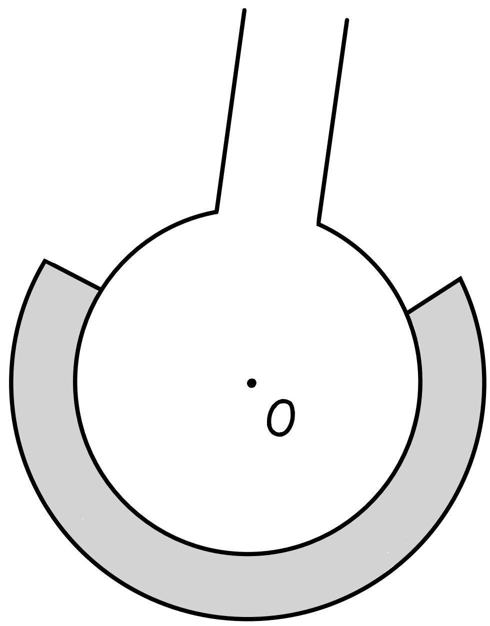
c) coppia rototraslatoria

è permessa la rotazione attorno all'asse della coppia e la traslazione lungo tale asse



d) coppia sferica

è permessa la rotazione di un corpo rispetto all'altro intorno ad un qualsiasi asse passante per il centro della coppia (O)



ora mi riferisco a quanto scritto a pagina 152 delle note

Per le coppie cinematiche, detti P_1 e P_2 due punti in contatto con P_1 solidale ad un corpo della coppia e P_2 solidale all'altro corpo della coppia, gli spostamenti virtuali di questi due punti sono legati dalla relazione

$$\delta x_1 = \delta x_2 + \delta \pi$$

dove $\delta\pi$ è uno spostamento infinitesimo sul piano Π tangente alla superficie di contatto in P_1 (e P_2)