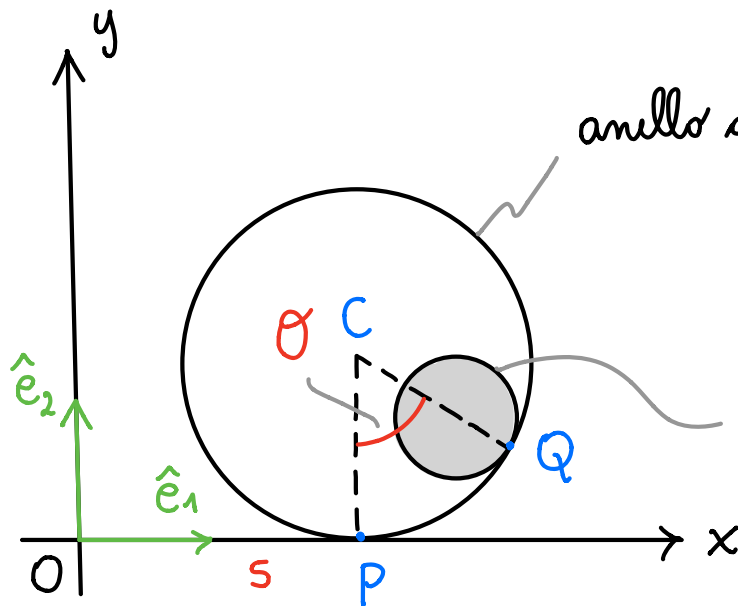


Esercizio

(18 settembre 2017)



anello di raggio R che rotola senza strisciare su una guida

disco di raggio r che rotola senza strisciare sull'anello

s è l'ascissa del punto di contatto P

a) Calcolare la velocità angolare dell'anello

Sol.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P^{(a)} + \vec{\omega}^{(a)} \times (C - P)$$

↓
vel. di P come punto solidale all'anello

$$C - O = s \hat{e}_1 + R \hat{e}_2$$

$$\vec{v}_C = \frac{d(C - O)}{dt} = \dot{s} \hat{e}_1$$

$$C - P = R \hat{e}_2$$

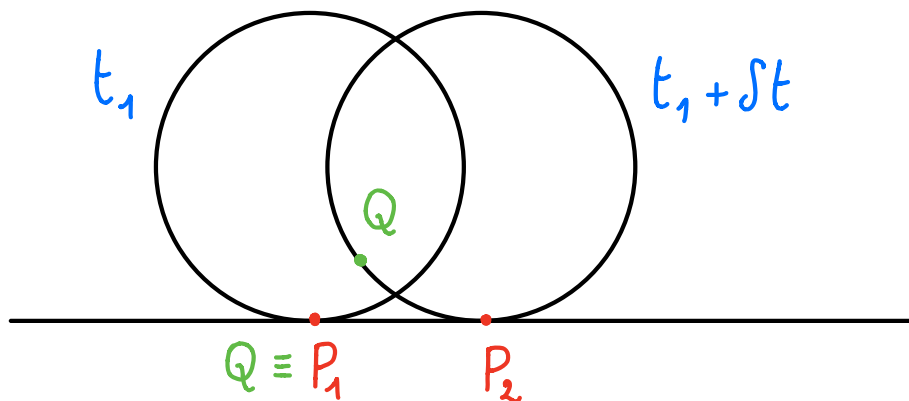
$$\vec{\omega}^{(a)} = \omega^{(a)} \hat{e}_3 \quad \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$$

$$P - O = s \hat{e}_1$$

Calcoliamo la velocità di P come punto di contatto

$$\vec{v}_P = \frac{d(P-O)}{dt} = \dot{s} \hat{e}_1,$$

avremo che $\vec{v}_P^{(a)} \neq \vec{v}_P$, infatti prendiamo due configurazioni dell'anello relative a due istanti t_1 e $t_1 + \Delta t$



il punto Q solidale all'anello che all'istante t_1 occupa la posizione del punto di contatto P_1 , occuperà un'altra posizione all'istante $t_1 + \Delta t$

Per trovare $\vec{v}_P^{(a)}$ si deve imporre la condizione di puro rotolamento, cioè

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_P^{(g)}$$

dove $\vec{v}_p^{(g)}$ è la velocità del punto solidale alla guida che nell'istante considerato è a contatto con l'anello

Poiché la guida è ferma si ha

$$\vec{v}_p^{(g)} = \vec{0}$$

e dunque $\vec{v}_p^{(a)} = \vec{0}$.

ATTENZIONE! Se la guida era in movimento avremmo avuto $\vec{v}_p^{(g)} \neq \vec{0}$

Torniamo alla formula

$$\vec{v}_c = \vec{v}_p^{(a)} + \vec{\omega}^{(a)} \times (C - P)$$

$$\dot{s} \hat{e}_1 = \vec{0} + \omega^{(a)} \hat{e}_3 \times R \hat{e}_2$$

$$\dot{s} \hat{e}_1 = \omega^{(a)} R (-\hat{e}_1)$$

da cui

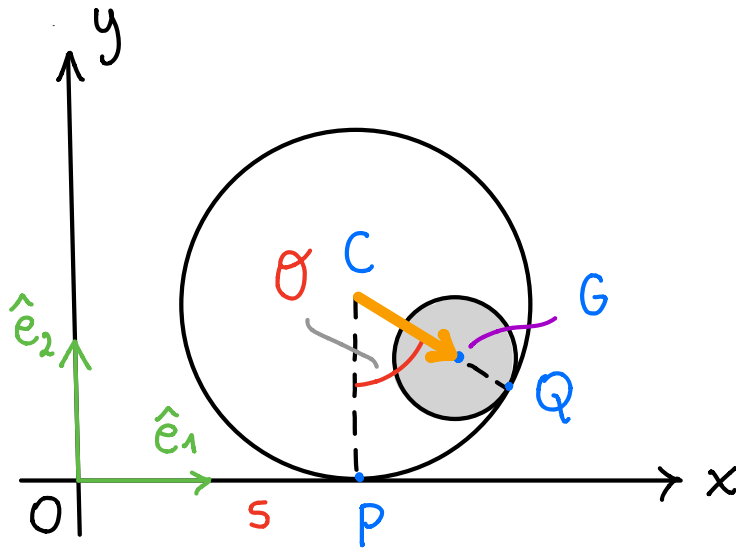
$$\dot{s} = -\omega^{(a)} R$$

$$\omega^{(a)} = -\frac{\dot{s}}{R}$$

$$\vec{\omega}^{(a)} = -\frac{\dot{s}}{R} \hat{e}_3$$

b) Calcolare la velocità angolare del disco

Sol.



Sia G il centro del cerchio che rappresenta il disco; usiamo la formula

$$\vec{v}_G = \vec{v}_Q^{(d)} + \vec{\omega}^{(d)} \times (G - Q)$$

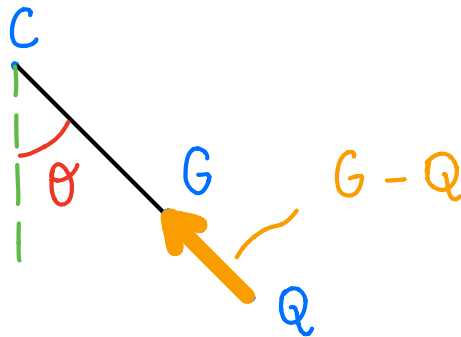
$$G - O = (s + (R - r) \sin \theta) \hat{e}_1 \\ + (R - (R - r) \cos \theta) \hat{e}_2$$

$$\vec{v}_G = \frac{d(G - O)}{dt} = (\dot{s} + \dot{\theta} (R - r) \cos \theta) \hat{e}_1 \\ + \dot{\theta} (R - r) \sin \theta \hat{e}_2$$

$$Q - O = (s + R \sin \theta) \hat{e}_1 + (R - R \cos \theta) \hat{e}_2$$

$$G - Q = (G - O) - (Q - O) = \\ -r \sin \theta \hat{e}_1 + r \cos \theta \hat{e}_2$$

oppure basta notare che



$$\vec{\omega}^{(d)} = \omega^{(d)} \hat{e}_3$$

$\vec{v}_Q^{(d)}$ è la velocità del punto del disco che nell'istante considerato occupa la posizione del punto di contatto disco - anello

$$\vec{v}_Q^{(d)} \neq \frac{d(Q-O)}{dt}$$

Imponiamo la condizione di puro rotolamento

$$\vec{v}_Q^{(d)} = \vec{v}_Q^{(a)}$$

dove $\vec{v}_Q^{(a)}$ è la velocità del punto dell'anello che nell'istante considerato occupa la posizione del punto di contatto disco - anello

$$\vec{v}_Q^{(a)} = \vec{v}_C + \vec{\omega}^{(a)} \times (Q - C)$$

$$\vec{v}_Q^{(a)} = \dot{s} \hat{e}_1 - \frac{\dot{s}}{R} \hat{e}_3 \times (R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2)$$

$$= \dot{s} \hat{e}_1 - \dot{s} \sin \theta \hat{e}_2 - \dot{s} \cos \theta \hat{e}_1$$

$$= \dot{s} (1 - \cos \theta) \hat{e}_1 - \dot{s} \sin \theta \hat{e}_2$$

$$\vec{v}_Q^{(d)} = \dot{s} (1 - \cos \theta) \hat{e}_1 - \dot{s} \sin \theta \hat{e}_2$$

Torniamo all'equazione

$$\vec{v}_G = \vec{v}_Q^{(d)} + \vec{\omega}^{(d)} \times (G - Q)$$

sostituendo le espressioni trovate prima per

\vec{v}_G , $\vec{v}_Q^{(d)}$, $G - Q$ si ha

$$(\dot{s} + (R - r) \dot{\theta} \cos \theta) \hat{e}_1 + (R - r) \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_2$$

$$= \dot{s} (1 - \cos \theta) \hat{e}_1 - \dot{s} \sin \theta \hat{e}_2 + \underbrace{\omega^{(d)} \hat{e}_3 \times$$

$$\underbrace{(-r \sin \theta \hat{e}_1 + r \cos \theta \hat{e}_2)}$$

||

$$- r \omega^{(d)} \sin \theta \hat{e}_2 - r \omega^{(d)} \cos \theta \hat{e}_1$$

proiettando lungo \hat{e}_1 si ha (si può proiettare anche lungo \hat{e}_2 e si ottiene lo stesso risultato)

$$\cancel{\dot{s}} + (R-r) \dot{\theta} \cancel{\cos\theta} = \dot{s} (1 - \cancel{\cos\theta})$$

$$- r \omega^{(d)} \cancel{\cos\theta}$$

$$\dot{\theta} (R-r) = -\dot{s} - r \omega^{(d)}$$

$$\omega^{(d)} = -\frac{\dot{s}}{r} - \dot{\theta} \frac{(R-r)}{r}$$

$$\vec{\omega}^{(d)} = \left(-\frac{\dot{s}}{r} - \dot{\theta} \frac{(R-r)}{r} \right) \hat{e}_3$$

c) Calcolare la posizione del centro istantaneo di rotazione C_0 del disco

Sol.

$$C_0 - Q = \frac{\vec{\omega}^{(d)} \times \vec{v}_Q^{(d)}}{|\vec{\omega}^{(d)}|^2}$$

$$= \left(-\frac{\dot{s} + \dot{\theta} (R-r)}{r} \right)^{-1} \hat{e}_3 \times (\dot{s} (1 - \cos\theta) \hat{e}_1 - \dot{s} \sin\theta \hat{e}_2) = \frac{\vec{\omega}^{(d)}}{|\vec{\omega}^{(d)}|^2}$$

$$C_0 - O = Q - O - \left(\frac{\dot{s} + \dot{\theta} (R-r)}{r} \right)^{-1} (\dot{s} \sin\theta \hat{e}_1 + \dot{s} (1 - \cos\theta) \hat{e}_2)$$

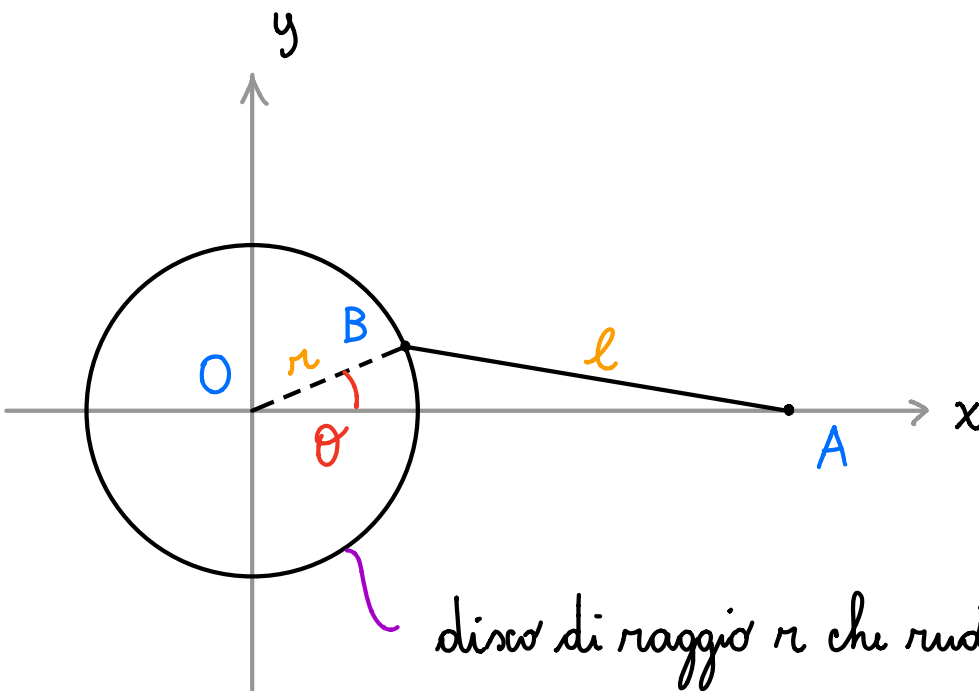
ricordando che

$$Q - O = (s + R \sin \theta) \hat{e}_1 + (R - R \cos \theta) \hat{e}_2$$

si ottiene infine

$$C_o - O = \left(s + \sin \theta \left(R - \frac{r \dot{s}}{\dot{s} + \dot{\theta} (R - r)} \right) \right) \hat{e}_1 + (1 - \cos \theta) \left(R - \frac{r \dot{s}}{\dot{s} + \dot{\theta} (R - r)} \right) \hat{e}_2$$

Esercizio (30 gennaio 2017)



disco di raggio r che ruota

intorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per O

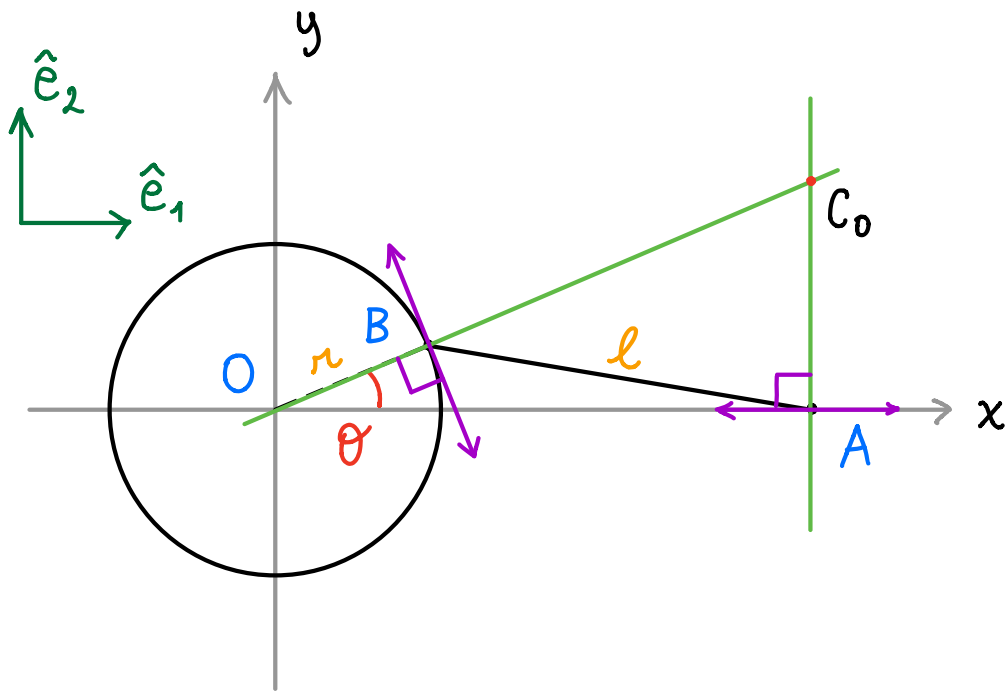
l'asta AB ha l'estremo A che scorre lungo l'asse Ox e l'altro estremo fissato ad un punto che sta sul bordo del disco ed è solidale al disco

l'asta è lunga $l > r$

2) Trovare le coordinate di C_0 dell'asta in funzione di θ

Sol.

Usiamo il teorema di Chasles: C_0 è l'intersezione delle due rette passanti una per A e l'altra per B e ortogonali rispettivamente alle velocità di A e B

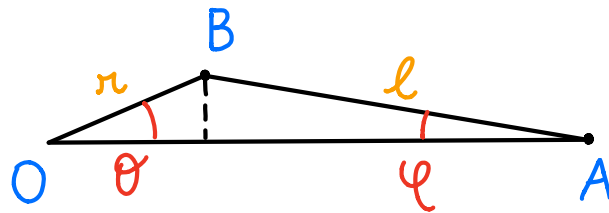


Allora si vede che

$$x_{C_0} = x_A$$

$$\frac{y_{C_0}}{x_{C_0}} = \tan \theta \quad \longrightarrow \quad y_{C_0} = x_{C_0} \tan \theta$$

Calcoliamo $x_{C_0} = x_A$



$$r \sin \theta = l \sin \varphi$$

$$|A - O| = x_A$$

$$x_{C_0} = r \cos \theta + l \cos \varphi$$

$$l^2 \cos^2 \varphi = l^2 - l^2 \sin^2 \varphi$$

$$l \cos \varphi = \sqrt{l^2 - l^2 \sin^2 \varphi} \quad (\text{notiamo che}$$

essendo $l > r$ si ha $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$,

e quindi $\cos \varphi > 0$)

$$l \cos \varphi = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\begin{cases} x_{C_0} = r \cos \theta + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta} \\ y_{C_0} = r \sin \theta + \tan \theta \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta} \end{cases}$$

Vi provi a rispondere a questa domanda
usando direttamente la formula

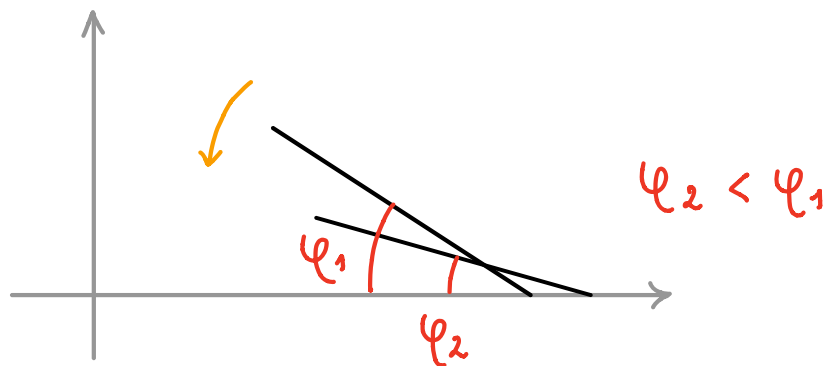
$$C_0 - Y = \frac{\vec{\omega}^{(a)} \times \vec{v}_Y}{|\vec{\omega}^{(a)}|^2}$$

dove Y è un punto che scegliete voi e \vec{v}_Y
 è la velocità di Y come punto solidale all'asta
 (scelte furbe sono A e B)

Vi servirà la velocità angolare dell'asta $\vec{\omega}^{(a)}$,
 e si ha

$$\vec{\omega}^{(a)} = -\dot{\varphi} \hat{e}_3$$

(per ottenere subito questa espressione basta
 prendere un angolo formato da una direzione
 solidale all'asta e da una direzione fissa, ad
 esempio φ , e notare che ad una rotazione
 antioraria dell'asta corrisponde una diminuzione
 di φ



da cui $\vec{\omega}^{(a)} = -\dot{\varphi} \hat{e}_3$

Ora vogliamo esprimere $\dot{\varphi}$ in termini di $\dot{\theta}$, θ come richiesto dal problema

da $r \sin \theta = l \sin \varphi$ si ha

$$r \dot{\theta} \cos \theta = l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta} \frac{r \cos \theta}{l \cos \varphi} = \dot{\theta} \frac{r \cos \theta}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}}$$

$$\vec{\omega}^{(a)} = - \frac{\dot{\theta} r \cos \theta}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}} \hat{e}_3$$

(la velocità angolare del disco è $\dot{\theta} \hat{e}_3$; non è richiesta)

- b) Trovare la base e la rulletta tracciate da C_0 nel caso in cui $l = r$ (si assume che quando $\theta = \pi/2$ l'estremo A coincida con O)

Sol.

Polare fissa:

Dal teorema di Chasles si ottiene

$$C_0 - O = x_{C_0} \hat{e}_1 + y_{C_0} \hat{e}_2$$

con

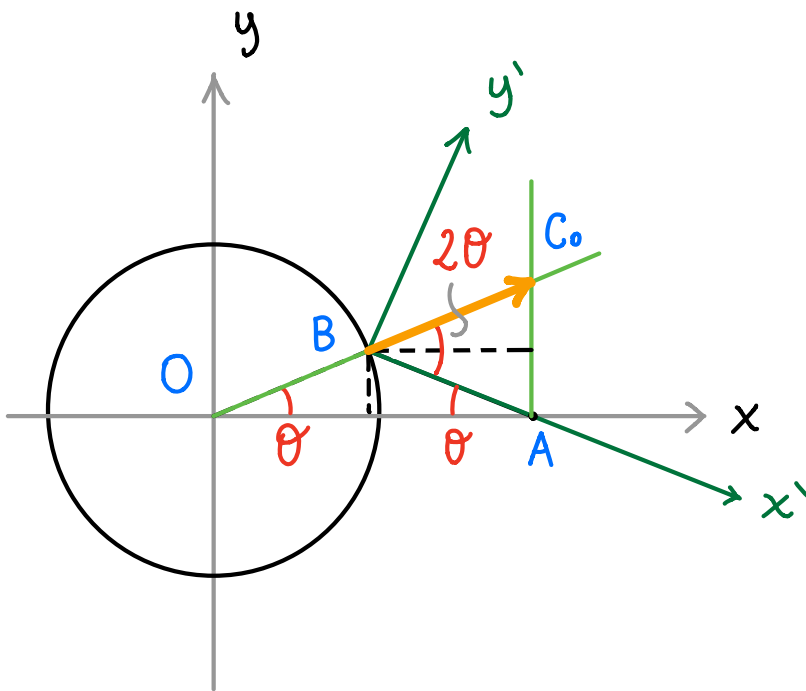
$$x_{C_0} = 2r \cos \theta, \quad y_{C_0} = 2r \sin \theta$$

Vediamo che

$$x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = (2r)^2$$

La polare fissa è una circonferenza con centro in O e raggio $2r$

Polare mobile: introduciamo il sistema di riferimento $Bx'y'$ solidale all'asta definito come si vede nella seguente figura



Scriviamo le coordinate di C_0 nel riferimento $Bx'y'$

$$C_o - B = x'_{c_o} \hat{e}_1 + y'_{c_o} \hat{e}_2$$

dove \hat{e}_1, \hat{e}_2 sono i vettori unitari associati agli assi

Bx', By'

Dalla costruzione grafica ottenuta usando il teorema di Chasles si vede che

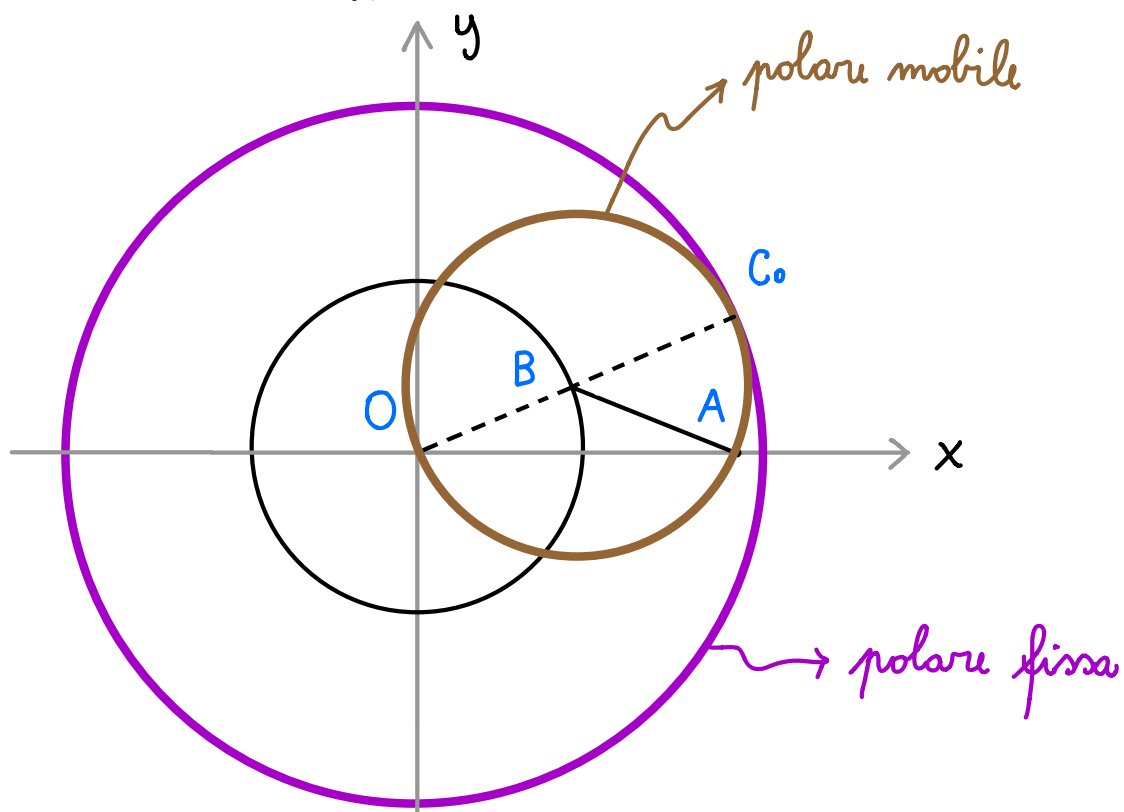
$$x'_{c_o} = r \cos 2\theta$$

$$y'_{c_o} = r \sin 2\theta$$

e che

$$(x'_{c_o})^2 + (y'_{c_o})^2 = r^2$$

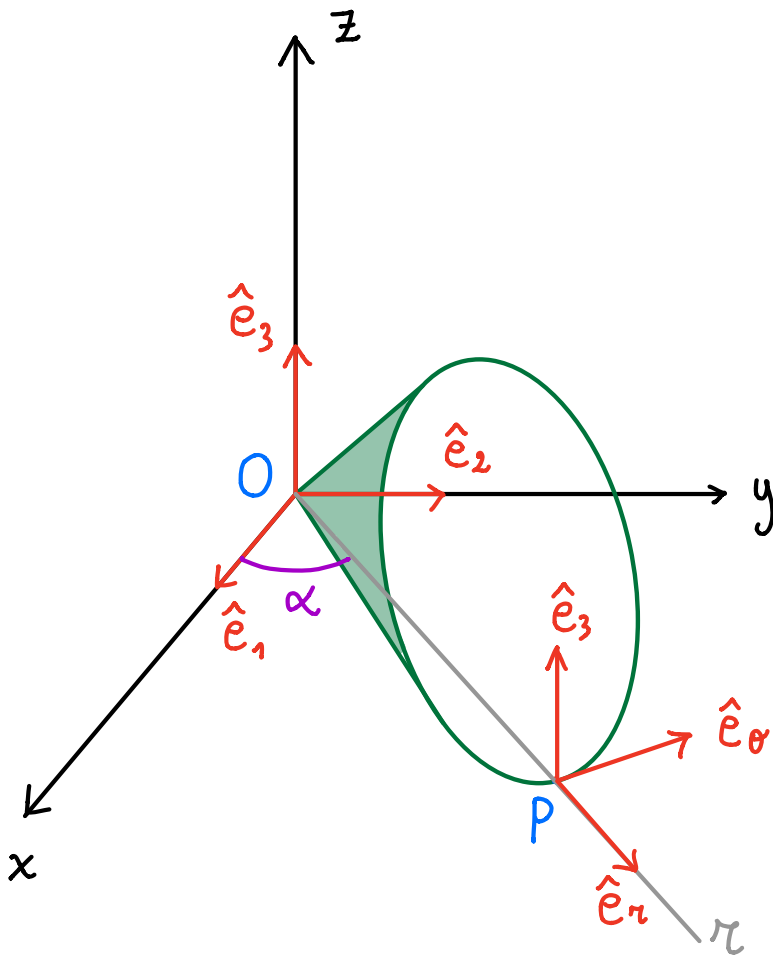
La polare mobile è una circonferenza con centro in B e raggio r



la polare mobile passa sempre per O ed A e
rotola senza strisciare sulla polare fissa

Esercizio

Calcoliamo la velocità angolare di un cono che rotola
senza strisciare su un piano Oxy mantenendo il
proprio vertice fisso in O



il segmento OP
è costituito dai punti
di contatto con il piano xy (il
cono è appoggiato lungo una sua
generatrice)

4 Sol. Introduciamo i sistemi di riferimento (si veda la figura precedente)

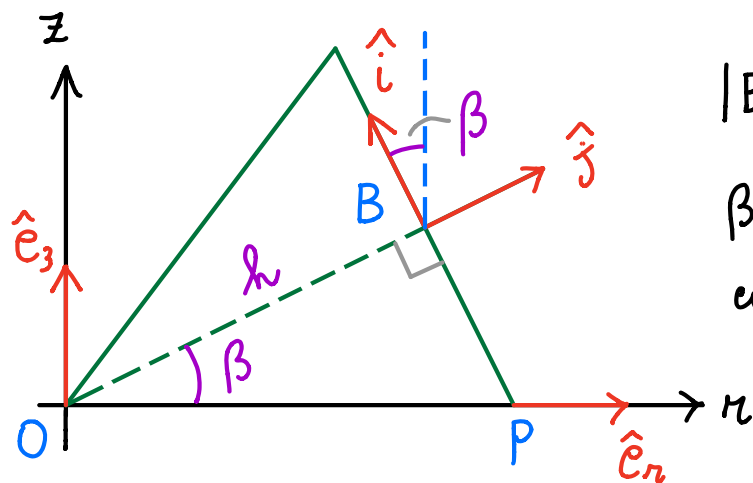
$$\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$$

$$\Sigma' = P \hat{e}_r \hat{e}_\theta \hat{e}_3$$

chiamiamo α l'angolo compreso tra \hat{e}_1 ed \hat{e}_r

Introduciamo un terzo riferimento (si veda la prossima figura)

$$\Sigma'' = B \hat{i} \hat{j} \hat{e}_\theta$$



$$|B - O| = h$$

β è un angolo costante

Possiamo ottenere un riferimento solidale al cono

ruotando Σ'' attorno a \hat{j} di un angolo opportuno

Notiamo che Σ'' si può ottenere da Σ' ruotando

Σ_1 di α attorno ad \hat{e}_3 e successivamente di β attorno ad \hat{e}_0 . La velocità angolare di Σ_1'' rispetto a Σ_1 è allora

$$\vec{\omega}'' = \alpha \hat{e}_3 + \beta \hat{e}_0$$

e poiché β è costante si ha

$$\vec{\omega}'' = \alpha \hat{e}_3$$

La velocità angolare del cono sarà data dalla velocità angolare di un qualunque base ad esso solidale e per quanto detto qui sopra la velocità angolare di una base solidale al cono ha la forma

$$\vec{\omega} = \alpha \hat{e}_3 + \tilde{\omega} \hat{j}$$

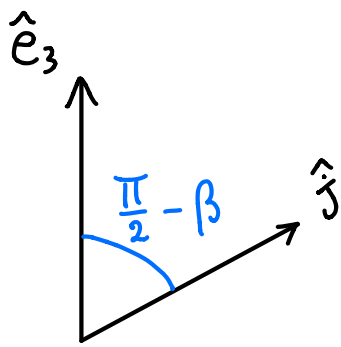
Cerchiamo di determinare $\tilde{\omega}$. Scriviamo

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (B - P)$$

$B - O = h \hat{j}$, con h altezza del cono

$$\vec{v}_B = \frac{d(B - O)}{dt} \Big|_{\Sigma_1} = h \frac{d\hat{j}}{dt} \Big|_{\Sigma_1} =$$

$$h (\vec{\omega}'' \times \hat{j}) = h (\alpha \hat{e}_3 \times \hat{j})$$



$$\hat{e}_3 \times \hat{j} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_B = \alpha h \cos\beta \hat{e}_\theta$$

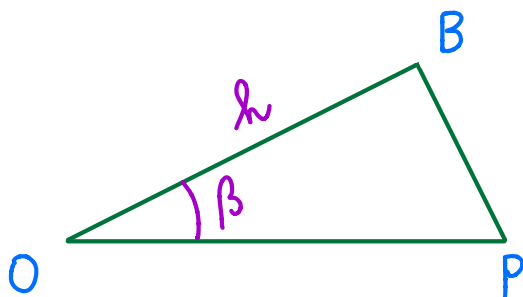
Passiamo a \vec{v}_P , questa è la velocità di P come punto solidale al cono, la quale si ottiene dalla condizione di puro rotolamento

$$\vec{v}_P^{(c)} = \vec{v}_P^{(\text{piano})}$$

dove $\vec{v}_P^{(\text{piano})}$ è la velocità di P come punto solidale al piano, cioè

$$\vec{v}_P^{(\text{piano})} = \vec{0} \quad \text{dato che il piano è fisso}$$

Infine ci serve $B - P = (h \tan\beta) \hat{i}$



$$\tan\beta = \frac{|B - P|}{h}$$

Torniamo all'equazione

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (B - P)$$

possiamo scriverla come

$$\dot{\alpha} h \cos \beta \hat{e}_\theta = \vec{0} + (\dot{\alpha} \hat{e}_3 + \tilde{\omega} \hat{j}) \times h \tan \beta \hat{i}$$

$$\dot{\alpha} h \cos \beta \hat{e}_\theta = \dot{\alpha} h \tan \beta (\hat{e}_3 \times \hat{i}) + h \tilde{\omega} \tan \beta (-\hat{e}_\theta)$$

$$\hat{e}_3 \times \hat{i} = -\sin \beta \hat{e}_\theta$$

$$\dot{\alpha} h \cos \beta \hat{e}_\theta = -\dot{\alpha} h \sin \beta \tan \beta \hat{e}_\theta - h \tilde{\omega} \tan \beta \hat{e}_\theta$$

Proiettiamo lungo \hat{e}_θ e dividiamo per h

$$\dot{\alpha} \cos \beta = -\dot{\alpha} \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} - \tilde{\omega} \tan \beta$$

$$\tilde{\omega} = -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \left(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\alpha} \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \right)$$

$$= -\frac{\cos \beta}{\sin \beta} \dot{\alpha} \left(\frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta}{\cos \beta} \right)$$

$$= -\frac{\dot{\alpha}}{\sin \beta}$$

Quindi la velocità angolare del cono è

$$\vec{w} = \alpha \hat{e}_3 - \frac{\alpha}{\sin \beta} \hat{j} = \alpha \left(\hat{e}_3 - \frac{1}{\sin \beta} \hat{j} \right)$$

$l = |P - O|$ lunghezza della generatrice

$l \sin \beta = r = |B - P|$ raggio della base del cono

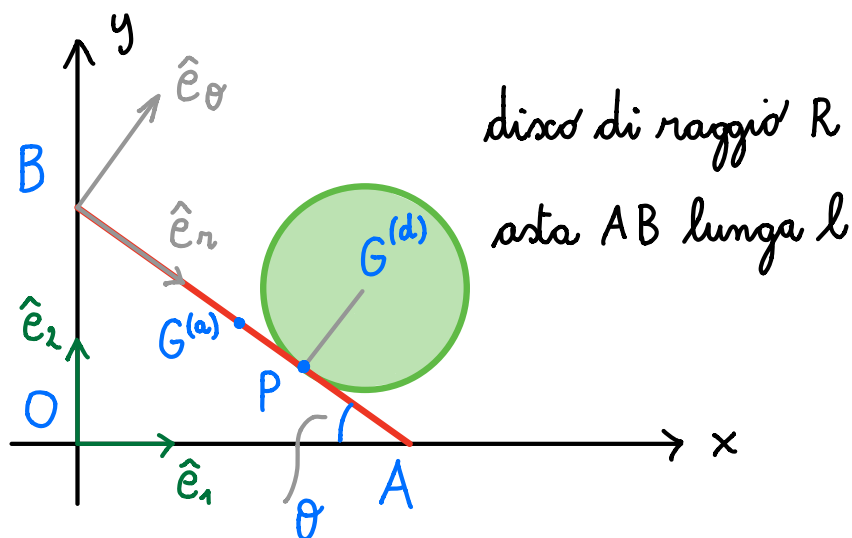
$$\vec{w} = \alpha \left(\hat{e}_3 - \frac{l}{r} \hat{j} \right)$$

Si poteva procedere imponendo

$$\vec{w} = w_1 \hat{e}_1 + w_2 \hat{e}_2 + w_3 \hat{e}_3$$

con w_1, w_2, w_3 incognite; provate anche seguendo questa strada applicando la formula fondamentale con i punti B, P e poi con i punti B, O.

Esercizio



Un disco rotola senza strisciare su un'asta AB i cui estremi scivolano lungo gli assi Ox, Oy (θ non è costante)

Indichiamo con $G^{(d)}$ il centro del disco e con $G^{(a)}$ il punto dell'asta che soddisfa

$$|B - G^{(a)}| = |A - G^{(a)}|$$

Introduciamo s tale che

$$|P - B| = s$$

a) Calcolare la velocità angolare del disco

Sol.

Introduciamo il riferimento $B \hat{e}_r \hat{e}_\theta$ solidale all'asta (vedi figura)

Usiamo

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{v}_P + \vec{\omega}^{(d)} \times (G^{(d)} - P)$$

$$G - O = B - O + s \hat{e}_r + R \hat{e}_\theta$$

$$= l \sin \theta \hat{e}_2 + s \hat{e}_r + R \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = l \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_2 + \dot{s} \hat{e}_r + s \frac{d\hat{e}_r}{dt} + R \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \vec{\omega}^{(a)} \times \hat{e}_r,$$

dove $\vec{\omega}^{(a)}$ è la velocità angolare dell'asta,

$$\vec{\omega}^{(a)} = -\dot{\theta} \hat{e}_3$$

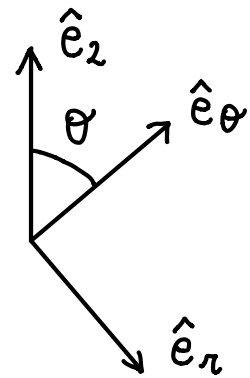
$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = -\dot{\theta} \hat{e}_3 \times \hat{e}_r = -\dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \vec{\omega}^{(a)} \times \hat{e}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_3 \times \hat{e}_\theta = \dot{\theta} \hat{e}_r$$

$$\vec{v}_G^{(d)} = l \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_2 + \dot{s} \hat{e}_r - s \dot{\theta} \hat{e}_\theta + R \dot{\theta} \hat{e}_r$$

$$\hat{e}_2 = (\cos \theta \hat{e}_\theta - \sin \theta \hat{e}_r)$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = l \dot{\theta} \cos \theta (\cos \theta \hat{e}_\theta - \sin \theta \hat{e}_r) + \dot{s} \hat{e}_r - s \dot{\theta} \hat{e}_\theta + R \dot{\theta} \hat{e}_r$$



$$\vec{v}_{G^{(d)}} = (\dot{s} + R \dot{\theta} - l \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_r + \dot{\theta} (l \cos^2 \theta - s) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{v}_P^{(d)} + \vec{\omega}^{(d)} \times (G^{(d)} - P)$$

$$G^{(d)} - P = R \hat{e}_\theta \quad \vec{\omega}^{(d)} = \omega^{(d)} \hat{e}_3$$

$$\vec{\omega}^{(d)} \times (G^{(d)} - P) = -R \omega^{(d)} \hat{e}_r$$

imponiamo la condizione di puro rotolamento

$\vec{v}_P^{(d)} = \vec{v}_P^{(a)}$
 vel. di P come punto solidale al disco \longleftarrow \longrightarrow vel. di P come punto solidale all'asta

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_A + \vec{\omega}^{(a)} \times (P - A)$$

$$\vec{\omega}^{(a)} = -\dot{\theta} \hat{e}_3$$

$$P - A = -(l - s) \hat{e}_r$$

$$A - O = (l \cos \theta) \hat{e}_1$$

$$\vec{v}_A = -(l \dot{\theta} \sin \theta) \hat{e}_1$$

$$= -(l \dot{\theta} \sin \theta) [(\cos \theta) \hat{e}_r + (\sin \theta) \hat{e}_\theta]$$

$$\vec{v}_P^{(a)} = -(l \dot{\theta} \sin \theta) [(\cos \theta) \hat{e}_r + (\sin \theta) \hat{e}_\theta]$$

$$- \dot{\theta} \hat{e}_3 \times [-(l - s) \hat{e}_r] =$$

$$-(l \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_r - (l \dot{\theta} \sin^2 \theta) \hat{e}_\theta$$

$$+ \dot{\theta} (l-s) \hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_P^{(a)} = - (l \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_r \\ + \hat{e}_\theta [(l-s) \dot{\theta} - l \dot{\theta} \sin^2 \theta]$$

Notiamo che

$$\vec{v}_P = \frac{d(P-O)}{dt} \neq \vec{v}_P^{(a)}$$

infatti

$$\vec{v}_P = \frac{d(P-A)}{dt} + \frac{d(A-O)}{dt} \\ = \frac{d(P-A)}{dt} + \vec{v}_A$$

$$P-A = -(l-s) \hat{e}_r$$

$$\frac{d(P-A)}{dt} = \dot{s} \hat{e}_r - (l-s) \frac{d\hat{e}_r}{dt} \\ = \dot{s} \hat{e}_r - (l-s) \vec{\omega}^{(a)} \times \hat{e}_r \\ = \dot{s} \hat{e}_r + \vec{\omega}^{(a)} \times (P-A)$$

$$\text{Ciò è } \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}^{(a)} \times (P-A) + \dot{s} \hat{e}_r$$

mentre abbiamo visto prima che

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_A + \vec{\omega}^{(a)} \times (P-A)$$

quindi

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(a)} + \dot{s} \hat{e}_r$$

Potremmo anche scrivere in questo caso

$$\vec{v}_P^{(a)} = \left. \frac{d(P-O)}{dt} \right|_{s \text{ costante}}$$

intendendo che si può ottenere $\vec{v}_P^{(a)}$ derivando rispetto al tempo $P-O$ con s considerato costante, dato che P deve essere inteso come punto solidale all'asta

Torniamo all'equazione

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{v}_P^{(d)} + \vec{\omega}^{(d)} \times (G^{(d)} - P)$$

e sostituiamo le quantità trovate; dopo aver proiettato lungo $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ si ha

$$\hat{e}_r : -l \dot{\theta} \cancel{\sin \theta} \cos \theta + \dot{s} + R\dot{\theta} = -l \dot{\theta} \cancel{\sin \theta} \cos \theta - R\omega^{(d)}$$

$$\hat{e}_\theta : l\dot{\theta} \cos^2 \theta - s\dot{\theta} = (l-s)\dot{\theta} - l\dot{\theta} \sin^2 \theta$$

dalla seconda abbiamo un'identità

$$l\dot{\theta}\cos^2\theta - s\dot{\theta} = -s\dot{\theta} + l\dot{\theta}(1 - \sin^2\theta)$$

$$l\dot{\theta}\cos^2\theta - s\dot{\theta} = l\dot{\theta}\cos^2\theta - s\dot{\theta}$$

dalla prima otteniamo l'incognita $w^{(d)}$

$$w^{(d)} = -\frac{\dot{s}}{R} - \dot{\theta}$$

$$\vec{w}^{(d)} = \left(-\frac{\dot{s}}{R} - \dot{\theta}\right) \hat{e}_3$$

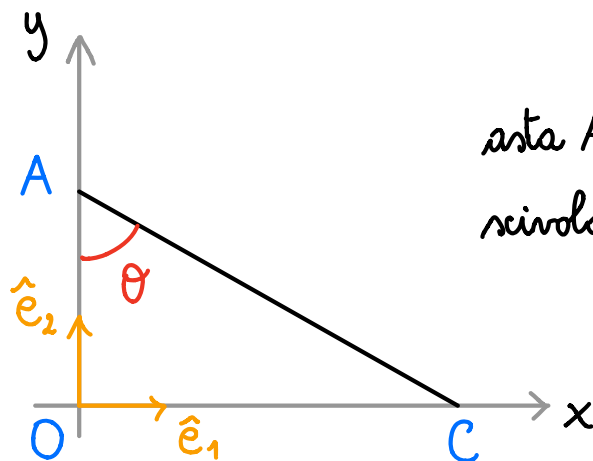
ii) Calcolare la posizione del centro istantaneo di rotazione del disco

Sol.

$$C_o - O = A - O + \frac{\vec{w}^{(d)} \times \vec{v}_A}{|\vec{w}^{(d)}|^2} \quad (\text{svolgere i conti})$$

Esempio (lo trovate anche nelle nte del prof. Gronchi)

$$|A - C| = l$$

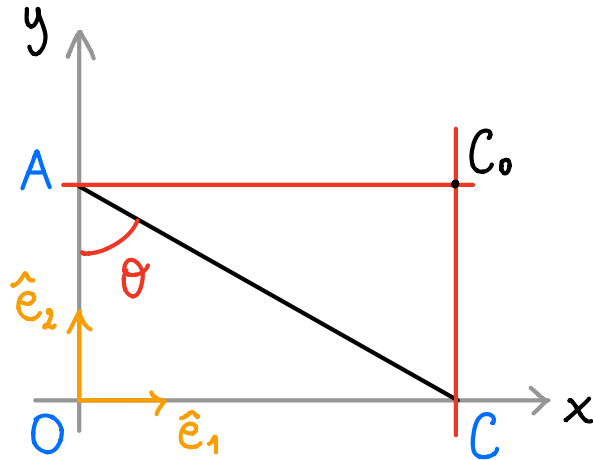


asta AC i cui estremi scivolano lungo gli assi Ox, Oy

i) Trovare la posizione del centro istantaneo di rotazione C_0

Sol.

Dal teorema di Charles si ha subito



$$C_0 - O = (l \sin \theta) \hat{e}_1 + (l \cos \theta) \hat{e}_2$$

ii) Determinare la polare fissa e la polare mobile

Sol.

polare fissa

$$\text{Scriviamo } C_0 - O = x_{C_0} \hat{e}_1 + y_{C_0} \hat{e}_2$$

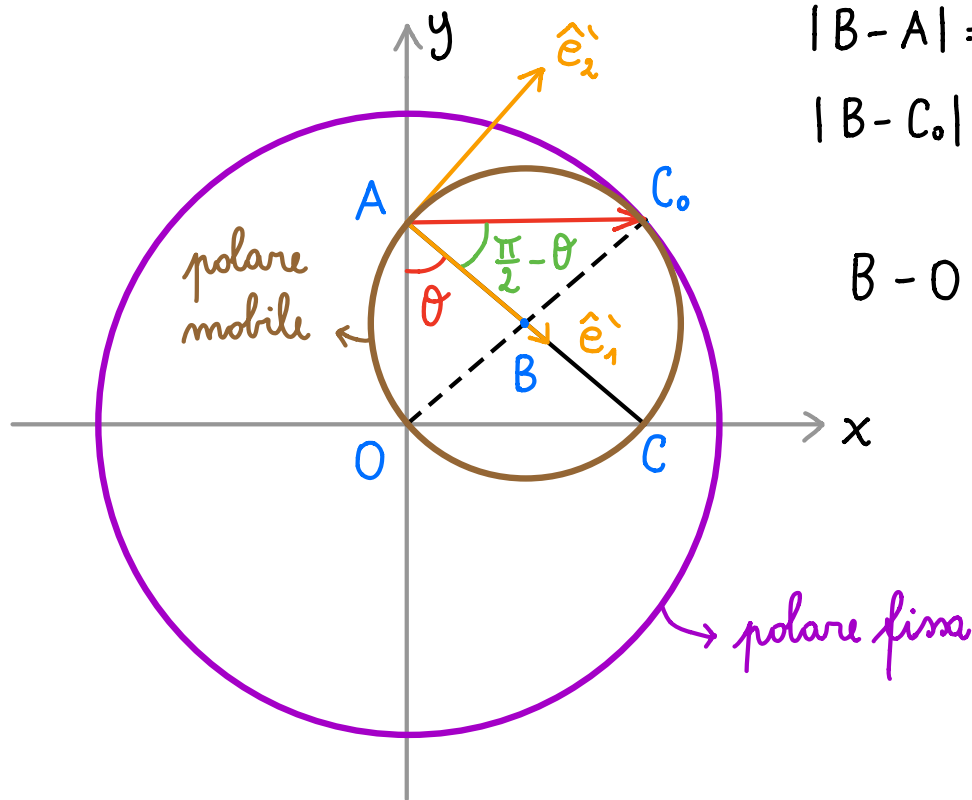
con

$$x_{C_0} = l \sin \theta$$

$$y_{C_0} = l \cos \theta$$

$$\text{e notiamo che } x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = l^2$$

la polare fissa è una circonferenza con centro in O e raggio l



$$|B-A| = |B-C| =$$

$$|B-C_0| = |B-O| = \frac{l}{2}$$

$$B-O = \frac{l}{2} \sin \theta \hat{e}_1$$

$$+ \frac{l}{2} \cos \theta \hat{e}_2$$

polare mobile

Introduciamo un riferimento solidale all'asta :

A $\hat{e}_1 \hat{e}_2$ definito come in figura

Scriviamo le coordinate di C_0 in questo riferimento

$$C_0 - A = x'_{C_0} \hat{e}_1 + y'_{C_0} \hat{e}_2$$

$$\begin{cases} x'_{C_0} = |C_0 - A| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = l \sin^2 \theta \\ y'_{C_0} = |C_0 - A| \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = l \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$|C_0 - A| = l \sin \theta$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Allora

$$\begin{cases} x'_{c_0} = l \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \\ y'_{c_0} = \frac{l}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_{c_0} - \frac{l}{2} = -\frac{l}{2} \cos 2\theta \\ y'_{c_0} = \frac{l}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\text{vale } \left(x'_{c_0} - \frac{l}{2} \right)^2 + (y'_{c_0})^2 = \frac{l^2}{4}$$

la polare mobile è una circonferenza di raggio $\frac{l}{2}$
e centro in B (si veda la figura precedente)