SISTEMI CONSERVATIVI AD UN GRADO DI LIBERTÀ (**)

Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove sotto l'azione di una forza $\vec{F}$ diretta lungo una retta γ e supponiamo che dipenda solo dalla posizione del punto su γ. Fissato un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Ox lungo γ si ha

$$
(1) \qquad \begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x) \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned}
$$

Supponiamo $F \in C^1$ (funzione di classe C^1) su un intervallo (a,b) con eventualmente $a=-\infty$, $b=+\infty$. Allora vale il teorema di esistenza e unicità locale della soluzione per l'equazione differenziale (1), o meglio, per il sistema

$$
\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m} F(x) = f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \qquad t \longmapsto x(t)
$$

In alcuni casi semplici (es. $F(x) = -kx$, oscillatore armonico) la soluzione si trova esplicitamente per ogni scelta dei dati iniziali; tuttavia nella maggioranza dei casi non è possibile ed è necessario condurre un'analisi qualitativa.

Questi sistemi ad un grado di libertà hanno sempre un integrale primo. Infatti se $E(x,v)$ è una funzione C^1

$$
\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial v}\dot{v} = \frac{\partial E}{\partial x} v + \frac{\partial E}{\partial v} f(x)
$$

e quindi si ottiene $\dot{E} = 0$ ponendo, per esempio

$$
\frac{\partial E}{\partial x} = -f(x) \qquad \frac{\partial E}{\partial v} = v
$$

(**) seguo « Appunti per il corso di Fisica Matematica », A.A. 2008 - 2009, di G. Benettin; « Introduzione ai sistemi dinamici », di A. Milani

da cui

$$
E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 - \int f(x)\,dx
$$

I due addendi di E possono essere interpretati come

- energia cinetica (per unità di massa): $T(v) = \frac{1}{2}v^2$
- energia potenziale (per unità di massa): $V(x) = -\int f(x)\,dx$

La somma $E = T + V$ è l'energia totale e poiché $\dot{E} = 0$, E è un integrale del moto, è l'integrale dell'energia. In effetti data $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ $\exists$ $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}(x) = -V'(x)$$

$$\text{e} \quad \ddot{x} = -V'(x) \quad \text{o} \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -V'(x) \end{cases}$$

Poiché la funzione $E(x,v)$ è un integrale primo del moto (cioè è costante su ogni soluzione), se si fissa il suo valore $\hat{E}$ l'equazione della curva di livello $E(x,v) = \hat{E}$ definisce implicitamente una relazione tra x e v; per esempio si può ricavare v in funzione di x

$$v = \pm\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}$$

La funzione $v = v(x)$ così ricavata è ben definita e regolare (di classe C^1) per $v \neq 0$ (chiaramente risulta che i punti $x \in \mathbb{R}$ accessibili al moto sono quelli per cui $\hat{E} - V(x) \geqslant 0$), scegliendo opportunamente il segno davanti alla radice secondo il segno di v. Ricordando inoltre che $v = \frac{dx}{dt}$ si ha allora l'equazione differenziale del primo ordine nell'incognita $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}$$

che è un'equazione differenziale a variabili separabili, la cui soluzione si può ottenere mediante una quadratura

$$t(x) - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{2(\hat{E} - V(\tilde{x}))}} \qquad \text{con } x(t_0) = x_0$$

La soluzione richiede però la legge oraria del moto, cioè la relazione $x = x(t)$, che è espressa dalla funzione inversa. L'esistenza della funzione inversa richiede che la funzione $t = t(x)$ sia monotona, cioè che $\dot{x}$ non cambi segno.
Si evince che il sistema è integrabile nel senso che la soluzione è definita da equazioni finite (non contenenti le derivate) che però possono coinvolgere una funzione implicita, una quadratura e una funzione inversa.
Il comportamento qualitativo delle soluzioni, più precisamente delle traiettorie, nel piano delle fasi (x,v), può essere descritto globalmente tracciando le curve di livello della funzione energia $E(x,v)$. Per tracciarle basta lo studio geometrico della funzione $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ senza alcun bisogno di risolvere l'equazione differenziale.
Oscillatore armonico $\quad \ddot{x} = -\omega^2 x, \quad V(x) = -\int -\omega^2 x \, dx = \frac{\omega^2 x^2}{2}$

le curve di livello $E(x,v) = \frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \hat{E}$ per ogni valore della costante $\hat{E} > 0$

sono ellissi centrate nell'origine che degenerano nell'origine stessa per $\hat{E} = 0$

(vedere figura 1 a pagina 22)

<u>Repulsore armonico</u> $\ddot{x} = \omega^2 x$, $V(x) = -\frac{\omega^2 x^2}{2}$

le curve di livello $E(x,v) = \frac{v^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} = \hat{E}$ per ogni $\hat{E} \neq 0$ sono iperboli centrate nell'origine, con i fuochi sull'asse v per $\hat{E} > 0$ (v non si annulla mai) e sull'asse x per $\hat{E} < 0$ (x non si annulla mai); per $\hat{E} = 0$ si ha il caso degenere di una coppia di rette $v = \pm \omega x$ che fanno da asintoti a tutte le iperboli

(vedere figura 1 a pagina 22)

<u>Particella libera</u> $\ddot{x} = 0$

la velocità v si conserva pertanto le traiettorie sono rette parallele all'asse x

(vedere figura 1 a pagina 22)

Nei tre disegni di figura 1 sono state inserite frecce a indicare il verso di percorrenza delle traiettorie, univocamente determinato dal fatto che $\dot{x} > 0$ e dunque x è crescente nel semipiano $v > 0$, e viceversa nel piano $v < 0$ (si ricordi infatti che per i sistemi meccanici che stiamo studiando $\dot{x} = v$).
L'immagine dell'insieme delle traiettorie nello spazio delle fasi di un sistema è detto <u>ritratto in fase</u> del sistema.
Definiamo i <u>punti o configurazioni di equilibrio</u> del sistema conservativo ad un grado di libertà

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -V'(x) \end{cases}$$

le coppie $(\bar{x}, 0)$ con $\bar{x}$ tale che $V'(\bar{x}) = 0$.
Si vede dunque che i valori $\bar{x}$ sono punti stazionari di $V(x)$, cioè punti di massimo o di minimo di $V(x)$.

<u>Osservazione</u>
Le curve di livello $E(x,v) = \hat{E}$ incrociano la retta $v = 0$ nei punti x^* in cui $V(x^*) = \hat{E}$ con tangente verticale se $f(x^*) \neq 0$ (cioè se $(x^*, 0)$ non è un punto di equilibrio). Infatti, per ogni moto $x(t)$, $v(t)$ con $v \neq 0$ resta definita una funzione $v = \tilde{v}(x)$ tale che $d\tilde{v}/dx = \dot{v}/\dot{x} = f(x)/v$ (ciò purché per $\dot{x} \neq 0$ si inverte $x(t)$ in $t(x)$ che consente di scrivere $\tilde{v}(t(x)) = \tilde{v}(x)$) e si vede che la derivata di $\tilde{v}$ diverge se (x, v) tende a $(x^*, 0)$ con $f(x^*) \neq 0$.
<u>Definizione</u>. I punti $(x^*, 0)$ dove v si annulla senza che contemporaneamente si annulli $f(x)$ sono chiamati <u>punti di arresto</u>

Se invece $f(x^*) = 0$ la curva di livello non è regolare in $(x^*, 0)$.

<u>Osservazione</u>
Per la particella libera si dice che si ha un caso parabolico, per l'oscillatore armonico un caso ellittico e

per il repulsore armonico un caso iperbolico.

Il punto $(0,0)$ è un punto di equilibrio sia dell'oscillatore armonico che del repulsore armonico; $x=0$ è un punto di minimo di $V(x)$ per l'oscillatore armonico e un punto di massimo di $V(x)$ per il repulsore armonico. Nel primo caso si dice essere un centro, mentre nel secondo caso è chiamato colle o sella.

Il procedimento (fatto vedere nei tre esempi elementari della particella libera e dell'oscillatore/repulsore armonico) in cui si studiano in dettaglio le curve $E(x,v)=\hat{E}$, con $E(x,v)=\frac{1}{2}v^2+V(x)$ diventa faticoso se V è un po' complicata. L'andamento qualitativo si può sempre ottenere in modo semplice a partire dal grafico dell'energia potenziale (utilizzando la conoscenza del segno della sua derivata $-f(x)$)

Potenziale "a scodella" (questo è ad esempio il caso dell'oscillatore armonico)

(si veda la figura 2 a pagina 22)

Si fissi un qualsiasi valore di energia $\hat{E}$ (superiore al minimo di V, qui preso uguale a 0)

* nei due punti in cui $V(x)=\hat{E}$ si ha che l'energia cinetica $K=v^2/2$ si annulla; corrispondentemente si hanno i due punti di arresto $(x_1,0)$ e $(x_2,0)$
* poichè deve essere $K=\hat{E}-V\geq 0$, il moto può svolgersi solo nell'intervallo $[x_1,x_2]$ ove $V\leq\hat{E}$
* all'interno di tale intervallo si ha $v\neq 0$; v cresce in modulo fino al valore massimo in corrispondenza del minimo di V, v decresce fino a 0 proseguendo verso l'altro punto di arresto
* per ogni $x\in(x_1,x_2)$ sono possibili due valori opposti di v, $v=\pm\sqrt{2(\hat{E}-V(x))}$, perciò la curva di livello è costituita da due rami che si incontrano nei punti di arresto
* come abbiamo già osservato nei punti di arresto la pendenza delle curve diventa infinita, derivando si ha

$$v'(x) = \mp\frac{V'(x)}{\sqrt{2(\hat{E}-V(x))}}$$

e nei punti di arresto il denominatore si annulla senza che si annulli anche il numeratore.

Ora consideriamo una generica funzione $V(x)$ e più precisamente un suo minimo locale (supponendo che esista). Sia x_0 il punto di minimo corrispondente ($f(x_0)=0$), approssimando $V(x)$ con il suo sviluppo di Taylor con centro x_0 fino al secondo ordine si ha

$$E(x,v)=\frac{v^2}{2}+V(x_0)+V'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$\{V'(x_0)=-f(x_0)=0\,,\ V''(x_0)=-f'(x_0)>0\}$$

$$E(x,v)=\frac{v^2}{2}+V(x_0)-\frac{1}{2}f'(x_0)(x-x_0)^2+\dots$$

Le curve di livello di $E(x,v)$ corrispondenti a valori di E immediatamente superiori a $E(x_0,0)=V(x_0)$ si chiudono attorno al minimo approssimativamente come ellissi

$$-f'(x_0)(x-x_0)^2+v^2=\text{cost}>0$$

<u>Potenziale «a montagnola»</u> (questo è ad esempio il caso del repulsore armonico)

(si veda la figura 3 a pagina 22)

Si prenda il massimo di V nell'origine, con $V(0) = 0$

* per $E < 0$ ci sono due punti di arresto $(x_1, 0), (x_2, 0)$; il requisito $V(x) \leq E$ restringe il moto all'esterno dell'intervallo (x_1, x_2)
* per $E > 0$ non ci sono punti di arresto: v in modulo diminuisce avvicinandosi al massimo di V, ma non si annulla mai
* per $E = 0$ si ha un unico punto ove $V = E$, cioè $v = 0$, ed esso è il punto (qui l'origine) dove V è massimo. È un punto di equilibrio, la velocità aumenta all'allontanarsi da questo punto, e si hanno quattro rami di curva di livello (che per il repulsore armonico sono semirette) che fanno da supporto ad altrettanti moti, due entranti e due uscenti

Consideriamo una generica funzione $V(x)$ per l'energia potenziale e un suo massimo non degenere. Sia x_0 il punto di massimo corrispondente ($f(x_0) = 0$). Allora in un intorno della sella $(x_0, 0)$ le curve di livello si comportano approssimativamente come le iperboli

$$-f'(x_0)(x - x_0)^2 + v^2 = \text{cost} \quad \text{con } -f'(x_0) < 0$$

<u>Esempi</u>

Si possono costruire graficamente in modo globale le curve di livello $E(x, v) = c$ tracciando la retta $y = c$ nel piano (x, y) e facendo corrispondere ad ogni punto del grafico $y = V(x)$ che sta sotto la retta $(y < c)$ una coppia di punti nel piano (x, v) con la regola

$$v = \pm\sqrt{2c - 2V(x)}$$

In questo modo si ottengono due archi di curva, simmetrici rispetto alla retta $v = 0$, il cui andamento come grafico $v = v(x)$ rispecchia gli alti e i bassi del grafico $y = V(x)$ (al contrario, per $v > 0$)

Nella figura 4 di pagina 22 si mostra il ritratto in fase per

- il potenziale cubico del tipo $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \alpha x^3$ $(\alpha > 0)$
- un potenziale quartico a forma di doppia buca, $\tilde{V}(x) = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \alpha x^4$ $(\alpha > 0)$

Si trovano subito i punti stazionari di $V(x)$ e $\tilde{V}(x)$

$V(x)$: $x(\omega^2 - \tilde{\alpha} x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \omega^2/\tilde{\alpha}$ con $\tilde{\alpha} = 3\alpha$

$\tilde{V}(x)$: $x(-\omega^2 + 4\alpha x^2) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm\, \omega/(2\sqrt{\alpha})$

I punti di equilibrio sono

$V(x)$: $(0,0)$, $(\omega^2/\tilde{\alpha}, 0)$

$\tilde{V}(x)$: $(0,0)$, $(\omega/(2\sqrt{\alpha}), 0)$, $(-\omega/(2\sqrt{\alpha}), 0)$

Si tracciano le separatrici per i livelli di energia pari ai massimi di $V(x)$ e $\tilde{V}(x)$

$V''(x) = \omega^2 - 2\tilde{\alpha} x$, $V''(0) = \omega^2 > 0$, $V''(\omega^2/\tilde{\alpha}) = -\omega^2 < 0$ $\qquad x = \frac{\omega^2}{\tilde{\alpha}}$ punto di massimo per $V(x)$

$\tilde{V}''(x) = -\omega^2 + 12\alpha x^2$, $\tilde{V}''(0) = -\omega^2 < 0$, $\tilde{V}''\left(\pm \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right) = 2\omega^2 > 0$ $\quad x = 0$ punto di massimo per $\tilde{V}(x)$

Infine si ha

$$V(x) \to +\infty \quad \text{per} \quad x \to -\infty$$
$$V(x) \to -\infty \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

e

$$\tilde{V}(x) \to +\infty \quad \text{per} \quad x \to \pm\infty$$

<u>Pendolo</u> (si veda la Figura 5 a pagina 22)

L'equazione differenziale è $\ddot{x} = -\omega^2 \operatorname{sen} x$, con $\omega^2 = g/l$ $(g, l > 0)$

L'energia potenziale risulta $V(x) = -\omega^2 \cos x$ e l'integrale dell'energia è

$$E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos x$$

I punti stazionari dell'energia potenziale sono $x = m\pi$. Per m pari $V(x)$ ha un minimo (non degenere) e quindi i punti di equilibrio $(x,v) = (2k\pi, 0)$ con k intero sono centri. Per m dispari $V(x)$ ha un massimo (non degenere) e i punti di equilibrio $(x,v) = ((2k+1)\pi, 0)$ sono selle. Localmente attorno ai minimi e ai massimi di V l'andamento è simile, rispettivamente, a quello dell'oscillatore e del repulsore armonico.

Si tracciano per prime le curve di livello $E(x,v) = \omega^2$, che è il massimo di V. Le corrispondenti traiettorie connettono i punti di equilibrio «sella» e supportano moti che asintoticamente per $t \to \pm\infty$ tendono a questi punti, in un verso o nell'altro a seconda del segno di v. Tali curve si chiamano <u>separatrici</u> e dividono il piano di fase in regioni con proprietà diverse:

- regione delle <u>librazioni</u> del pendolo che si ha per $-\omega^2 < E < \omega^2$
- due regioni delle <u>rotazioni</u> che si hanno per $E > \omega^2$

Nella prima regione le traiettorie sono curve chiuse che circondano ciascun centro, mentre per $E > \omega^2$ si ottengono due curve, una contenuta tutta nel semipiano $v > 0$ e una tutta nel semipiano $v < 0$.

<u>Potenziale caratteristico del moto centrale</u>

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

che si incontra nello studio del moto centrale con potenziale Kepleriano

Il moto centrale si svolge in un piano ed è descritto da coordinate polari piane r, ϑ che sono legate alle coordinate cartesiane dalle relazioni

$$x = r\cos\vartheta \;, \quad y = r \operatorname{sen}\vartheta$$

L'energia cinetica diventa

$$K(r,\vartheta) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2)$$

Inoltre il momento angolare $l = r^2\dot{\vartheta}$ si conserva, ricavando $\dot{\vartheta}$ e sostituendo si trova $K = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + l^2/r^2)$ e per l'energia

$$E(r,\dot{r};l) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2r^2} + V(r)$$

dove l va pensato come parametro e $V(r)$ è l'energia potenziale del problema di moto centrale considerato, $V(r) = -\alpha/r$, $\alpha > 0$ nel caso Kepleriano.

Ci si ritrova così un problema ad un solo grado di libertà per la coordinata radiale r con

- energia cinetica efficace $\frac{1}{2}\dot{r}^2$
- energia potenziale efficace $V(r;l) = V(r) + l^2/(2r^2)$, che è della forma mostrata all'inizio con $\beta = l^2/2$ e $x \equiv r$

Il grafico di $V(r)$ e il ritratto in fase di questo sistema (per $l \neq 0$) sono riportati nella figura 6 a pagina 22. È opportuno fare attenzione alla curva di livello relativa a $E = 0$ che gioca il ruolo di separatrice. Essa divide i moti con r limitato che si hanno per $E < 0$ dai moti con r non limitato che si trovano per $E > 0$. Per il caso Kepleriano si tratta rispettivamente dei moti ellittici e iperbolici. Il punto di equilibrio di tipo centro in corrispondenza del minimo di V rappresenta i moti circolari (r è costante).

<u>Osservazione</u>

In tutti i casi mostrati i moti sulle separatrici convergono ai punti di equilibrio asintoticamente per $t \to \pm\infty$; se infatti si potesse raggiungere un punto di equilibrio in un tempo finito t^* si avrebbe che due diversi movimenti, quello sulla separatrice e il moto stazionario corrispondente all'equilibrio, coinciderebbero a $t = t^*$, contro il teorema di Cauchy (nella parte di unicità)

<u>Trattazione analitica completa</u>

Il ritratto in fase contiene una descrizione dettagliata del moto, a meno del tempo di percorrenza di ciascuna traiettoria.

Ritorniamo al tempo di percorrenza del tratto di traiettoria corrispondente alla curva di livello $E(x,v) = \hat{E}$, che congiunge i punti (x_1, v_1) e (x_2, v_2)

$$t_2 - t_1 = \pm \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}}$$

dove x_1 e x_2 sono i valori della coordinata x ai tempi t_1 e t_2.

In un punto di inversione x^* l'integrando diverge (dato che $\hat{E} = V(x^*)$). Tuttavia, essendo $V'(x^*) \neq 0$ è facile verificare che l'integrale è finito, infatti

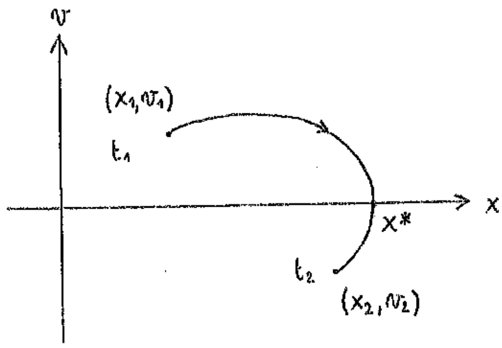
$$\sqrt{2(V(x^*) - V(x))} = \sqrt{-2V'(x^*)(x-x^*) + \ldots} \simeq \text{cost}\sqrt{|x-x^*|}$$

e per $x \to x^*$ non si ha divergenza. Se invece ci avviciniamo ad un massimo $\tilde{x}$ di V, cioè ci muoviamo lungo una separatrice verso un punto di equilibrio di tipo sella, l'integrando diverge più in fretta: questa volta $V'(\tilde{x}) = 0$ pertanto

$$\sqrt{2(V(\tilde{x}) - V(x))} = \sqrt{-V''(\tilde{x})(x-\tilde{x})^2 + \dots} \simeq \text{cost}\,|x-\tilde{x}|$$

e l'integrale ha una divergenza logaritmica (più rapida ancora se $V''(\tilde{x}) = 0$). Si verifica così in modo analitico che è infinito il tempo necessario per raggiungere una sella lungo una separatrice.

Se una curva di livello $E(x,v) = \hat{E}$ passa per un punto di inversione $(x^*, 0)$ il tempo necessario perchè la soluzione vada da (x_1, v_1) a (x_2, v_2) con, ad esempio, $v_1 > 0$ e $v_2 < 0$ sarà dato dalla somma di due integrali

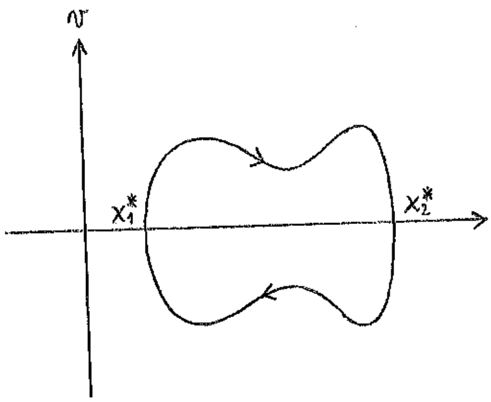


$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}} - \int_{x^*}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}}$$

Orbite periodiche

Il caso più importante dell'applicazione di questo procedimento di calcolo della legge oraria «a tratti» è quello del calcolo dei periodi.

Se x_1^* e x_2^* sono due punti di inversione per un certo livello di energia $(V(x_1^*) = V(x_2^*))$ e sono tali che nell'intervallo $x_1^* < x < x_2^*$ vale sempre $V(x) < V(x_1^*)$ allora esistono due curve definite per $x_1^* < x < x_2^*$ (simmetriche rispetto all'asse x) e l'insieme dei punti di queste curve è la traiettoria che fa da supporto al moto con condizione iniziale ad esempio in $(x_1^*, 0)$. Ogni soluzione passante per questo punto è un'orbita periodica. Il periodo è il tempo necessario per ritornare in $(x_1^*, 0)$ partendo dallo stesso punto, quindi è espresso dalla somma



$$P = \int_{x_1^*}^{x_2^*} \frac{dx}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}} - \int_{x_2^*}^{x_1^*} \frac{dx}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}} =$$

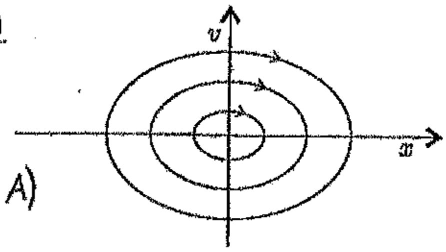
$$= 2 \int_{x_1^*}^{x_2^*} \frac{dx}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}}$$

Esempio: oscillatore armonico

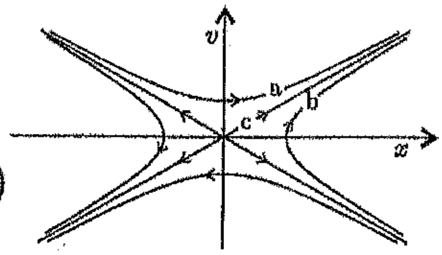
$V(x) = \frac{1}{2}w^2 x$, fissato il livello di energia $\hat{E} > 0$, siano x^* e $-x^*$ i due punti di inversione

Allora il periodo è

FIGURA 1

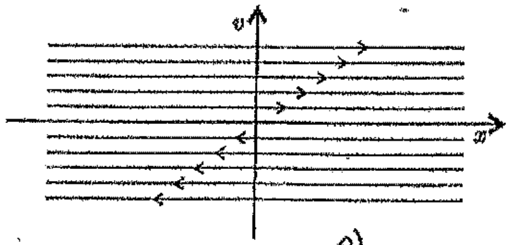


A)



B)

Ritratto in fase per
A) oscillatore armonico
B) repulsore armonico
C) particella libera



C)

FIGURA 2

Ritratto in fase per un potenziale con un minimo nell'origine

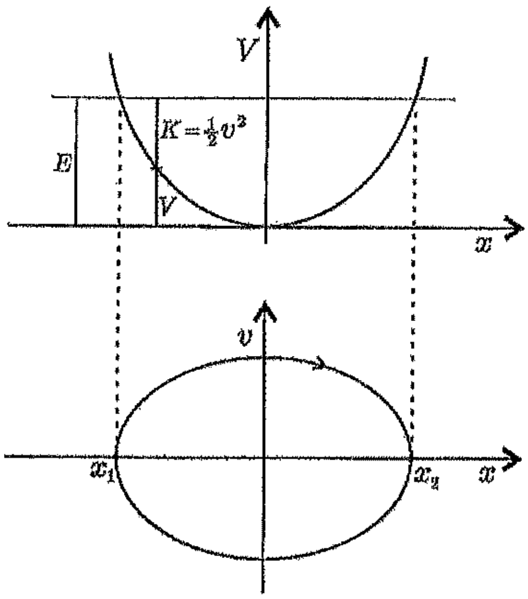
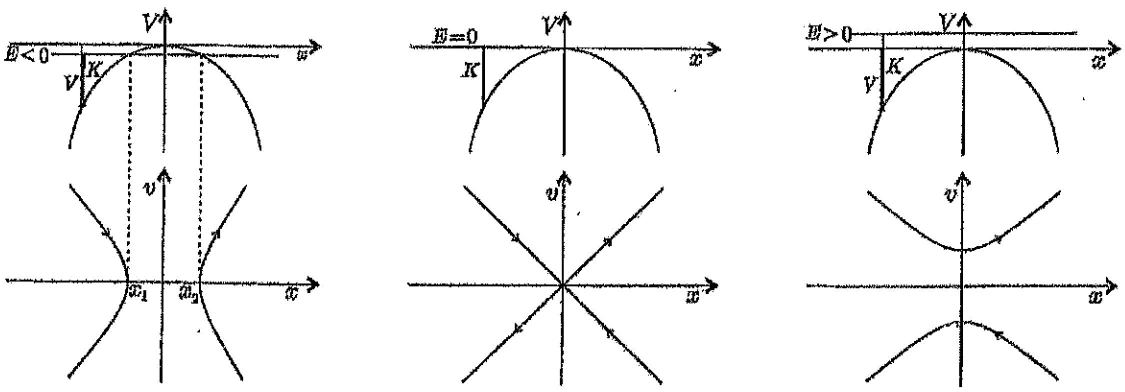


FIGURA 3 Ritratto in fase per un potenziale con un massimo nell'origine



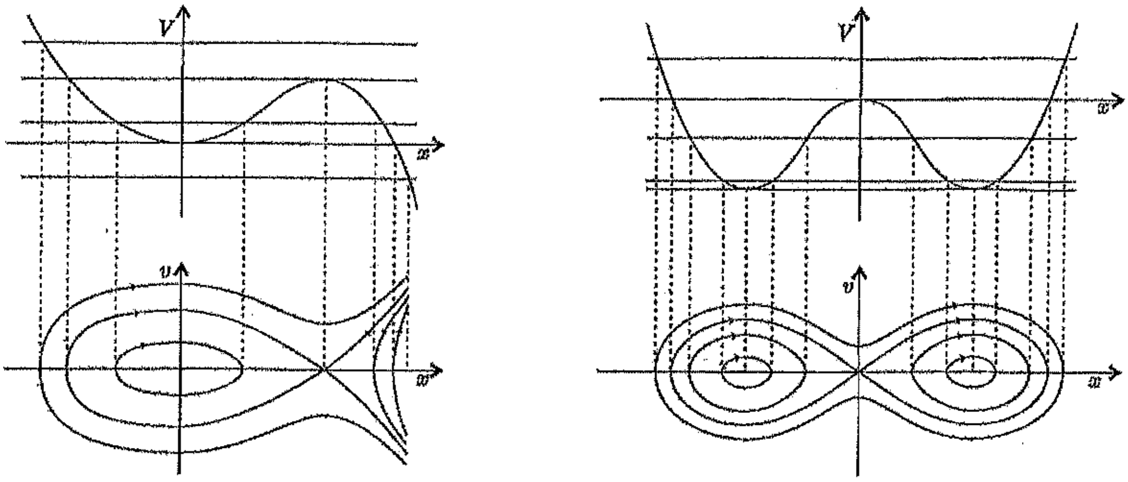


FIGURA 4 Grafico dell'energia potenziale e ritratto in fase per $V(x) = \omega^2 x^2/2 - \alpha x^3$, $\alpha > 0$ (a sinistra) e $V(x) = -\omega^2 x^2/2 + \alpha x^4$, $\alpha > 0$ (a destra)

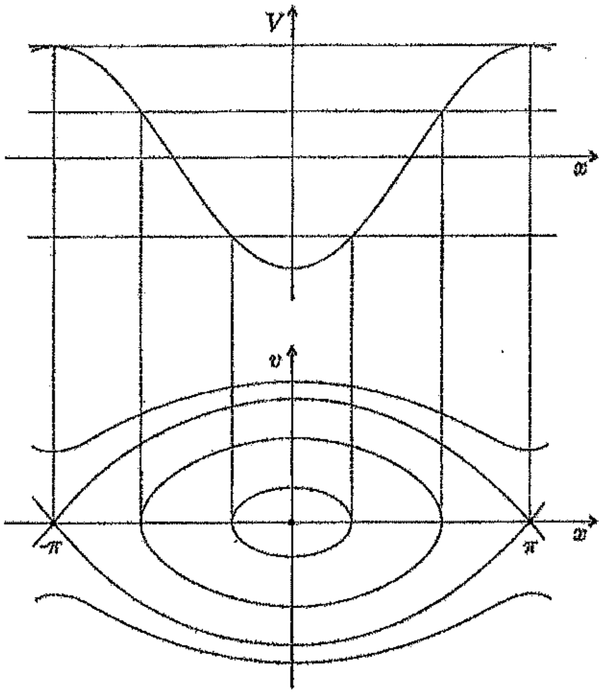


FIGURA 5 Grafico dell'energia potenziale e ritratto in fase del pendolo

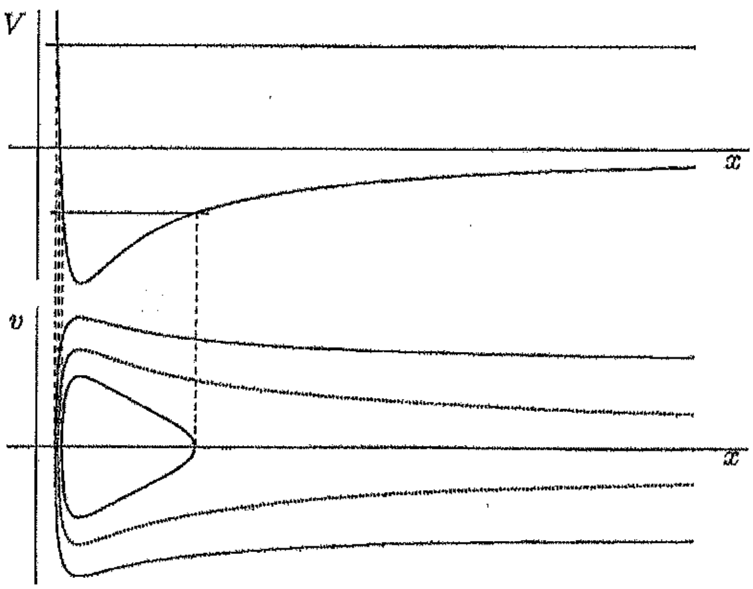


FIGURA 6 Grafico dell'energia potenziale e ritratto in fase per $V(x) = -\alpha/x + \beta/x^2$

$$P = 2\int_{-x^*}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}} = 4\int_{0}^{x^*} \frac{dx}{\sqrt{2(\hat{E} - V(x))}}$$ per la simmetria di $V(x)$ rispetto all'asse delle ordinate

$$\hat{E} = V(x^*) = V(-x^*) = \frac{1}{2}\omega^2(x^*)^2$$

L'integrale da risolvere è improprio, si ha

$$P = 4 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{x^*-\varepsilon} \frac{dx}{\omega\sqrt{(x^*)^2 - x^2}} = \frac{4}{\omega} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{atan} \frac{x}{\sqrt{(x^*)^2 - x^2}}\Bigg|_0^{x^*-\varepsilon} =$$

$$= \frac{4}{\omega} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{atan} \frac{x^*-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(2x^*-\varepsilon)}} = \frac{4}{\omega}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Campo centrale armonico

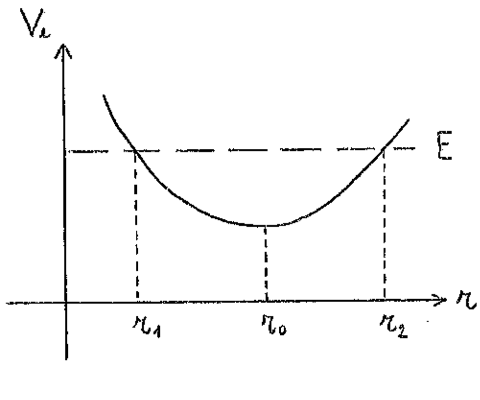
Dato il potenziale centrale armonico $V(r) = kr^2$, $k > 0$, mostrare che se il momento angolare è diverso da zero tutte le orbite sono chiuse e limitate e hanno la forma di un'ellisse

Il potenziale efficace assume la forma

$$V_e(r) = kr^2 + \frac{\ell^2}{2\bar{m}r^2} \qquad (\bar{m} = \text{massa del punto})$$

$$\lim_{r \to 0^+} V_e = \lim_{r \to +\infty} V_e = +\infty$$

$$V_e' = 2kr - \frac{\ell^2}{\bar{m}r^3}, \quad V_e' = 0 \iff 2k\bar{m}r^4 = \ell^2, \quad r = \left(\frac{\ell^2}{2k\bar{m}}\right)^{1/4} = r_0$$



$$V_e(r_0) = \sqrt{\frac{2k\ell^2}{\bar{m}}} = E_0$$

Per ogni valore di $E > E_0$ l'equazione $E - V_e(r) = 0$ ha due radici r_1 e r_2, infatti

$$E - kr^2 - \frac{\ell^2}{2\bar{m}r^2} = 0 \iff 2\bar{m}Er^2 - 2k\bar{m}r^4 - \ell^2 = 0$$

sia $t = r^2$ allora si ha $2k\bar{m}t^2 - 2\bar{m}Et + \ell^2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{E}{2k} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2k}\right)^2 - \frac{\ell^2}{2k\bar{m}}} = \frac{E}{2k}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{(2k)^2\ell^2}{2k\bar{m}E^2}}\right)$$

$$= \frac{E}{2k}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\right) \quad \text{dove ricordiamo che } E > E_0$$

le due radici assumono le espressioni

$$r_{1,2} = \sqrt{\frac{E}{2k}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}}$$

Sappiamo che

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\bar{m}}(E - V_e)} \quad \text{da cui} \quad \frac{dr}{d\theta} = r^2\sqrt{\frac{2\bar{m}}{\ell^2}(E - V_e)} \quad \text{dove si è usata la relazione } \frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{r^2 m}$$

Integrando per separazione di variabili si ha

$$\theta - \bar{\theta} = \int_{\bar{r}}^{r(\theta)} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2\bar{m}}{\ell^2}(E - V_e)}} = \int_{\bar{r}}^{r(\theta)} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2\bar{m}E}{\ell^2} - \frac{\rho^2}{r_0^4} - \frac{1}{\rho^2}}}, \quad \theta(0) = \bar{\theta},\ r(0) = \bar{r}$$

dove il dato iniziale è scelto in modo che $\frac{dr}{dt} > 0$, inoltre si ha $r(\theta') < r_2 \ \forall\ \bar{\theta} \leq \theta' \leq \theta$.

Operiamo la sostituzione $\rho = 1/\sqrt{w}$ $(\rho^2 = 1/w)$, si può riscrivere l'integrale come

$$\theta - \bar{\theta} = -\frac{1}{2}\int_{\bar{w}}^{w(\theta)} \frac{d\tilde{w}}{\sqrt{\left(\frac{2\bar{m}E\tilde{w}}{\ell^2}\right) - \tilde{w}^2 - \frac{1}{r_0^4}}} \qquad \left(\text{notare che } \frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{1}{2\sqrt{w}}\,dw\right)$$

dove $\bar{w} = \frac{1}{\bar{r}}$, $w_1 \leq \bar{w} \leq w_2$ con $w_1 = \frac{1}{r_2^2}$, $w_2 = \frac{1}{r_1^2}$

Osservando che $\frac{1}{r_0^4} = w_1 w_2$ e $\frac{2\bar{m}E}{\ell^2} = w_1 + w_2$ abbiamo

$$\theta - \bar{\theta} = \frac{1}{2}\int_{w(\theta)}^{\bar{w}} \frac{d\tilde{w}}{\sqrt{(\tilde{w} - w_1)(w_2 - \tilde{w})}}$$

È possibile scegliere l'asse rispetto a cui si misura l'angolo θ in modo tale che $r(\theta = 0) = r_1$, dunque si ha

$\bar{w} = w_2$ e

$$\theta = \frac{1}{2}\int_{w(\theta)}^{w_2} \frac{dw}{\sqrt{(\bar{w}-w_1)(w_2-w)}}$$

Applichiamo l'ulteriore cambiamento di variabile

$$z = w - w_1 \quad \text{, da cui}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\int_{w(\theta)-w_1}^{w_2-w_1} \frac{dz}{\sqrt{z\,(w_2-w_1-z)}}$$

e $x = (w_2 - w_1)^{-1} z$, da cui

$$\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{w(\theta)-w_1}{w_2-w_1}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Infine poniamo $x = \operatorname{sen}^2\alpha$ (in effetti vale $0 \leqslant x \leqslant 1$)

$$\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha(\theta)}^{\pi/2} \frac{2\operatorname{sen}\tilde{\alpha}\cos\tilde{\alpha}\;d\tilde{\alpha}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\tilde{\alpha}\,(1-\operatorname{sen}^2\tilde{\alpha})}} = \int_{\alpha(\theta)}^{\pi/2} d\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \tilde{\alpha}(\theta)$$

dove $\alpha(\theta) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x(\theta)} = \operatorname{arcsen}\sqrt{\dfrac{w(\theta)-w_1}{w_2-w_1}}$

Da $\dfrac{\pi}{2} - \theta = \operatorname{arcsen}\sqrt{\dfrac{w(\theta)-w_1}{w_2-w_1}}$ si ottiene $\cos^2\theta = \dfrac{w(\theta)-w_1}{w_2-w_1} = \left(\dfrac{1}{r^2(\theta)} - \dfrac{1}{r_2^2}\right)\left(\dfrac{1}{r_1^2} - \dfrac{1}{r_2^2}\right)^{-1} \longrightarrow$

$$\frac{1}{r^2(\theta)} = \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)(1+\cos 2\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)\cos 2\theta \text{ , inoltre}$$

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{4kE}{E_0^2} \qquad \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} = \frac{4kE}{E_0^2}\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$$

perciò $\dfrac{1}{r^2(\theta)} = \dfrac{\bar{m}E}{\ell^2}\left(1 + \sqrt{1-\left(\dfrac{E_0}{E}\right)^2}\cos 2\theta\right) \qquad (E_0^2 = 2k\ell^2/\bar{m})$

Se definiamo A ed e come segue

$$A^2 = \frac{E_0^2}{2kE} = \frac{\ell^2}{\bar{m}E} \quad , \quad e = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2} < 1$$

allora la distanza radiale come funzione di θ assume l'espressione

$$r(\theta) = \frac{A}{\sqrt{1+e\cos 2\theta}}$$

Al variare di θ in $[0,2\pi)$ la formula precedente permette di tracciare un'ellisse con semiassi di lunghezza r_1 e r_2. Introduciamo gli assi cartesiani x e y in modo che $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Valgono le relazioni

$$r^2 = x^2+y^2, \qquad r^2\cos 2\theta = r^2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) = x^2-y^2$$

che permettono di scrivere

$$A^2 = r^2(1+e\cos 2\theta) = (x^2+y^2)+e(x^2-y^2)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{x^2}{A^2}(1+e) + \frac{y^2}{A^2}(1-e) = 1$$

Questa è l'equazione di un'ellisse con centro l'origine e semiassi $a = \dfrac{A}{\sqrt{1-e}}$, $b = \dfrac{A}{\sqrt{1+e}}$

$$a = \frac{\ell^2}{mE}\frac{1}{\sqrt{1-e}} = \frac{\ell^2}{mE}\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{E}{2k}\sqrt{1+e} = r_2$$

$$b = \frac{\ell^2}{mE}\frac{1}{\sqrt{1+e}} = \frac{\ell^2}{mE}\frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{E}{2k}\sqrt{1-e} = r_1$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{\frac{2e}{1+e}} \quad \text{(eccentricità dell'ellisse)}$$

<u>Esercizio</u>

Un punto materiale di massa unitaria si muove in un campo di forze centrale

$$\vec{F}(\rho) = -\gamma^2\left(\frac{4}{\rho^3}+\frac{a^2}{\rho^5}\right)\hat{e}_\rho, \qquad \gamma, a \in \mathbb{R}^+.$$

Inizialmente il punto è a distanza a dal centro di forza e ha una velocità perpendicolare al raggio vettore e di intensità $3\gamma/(\sqrt{2}\,a)$. Trovare l'equazione polare della traiettoria ed il tempo che impiega la particella a raggiungere il centro di forza.

Sia $f(\rho) = -\gamma^2\left(\dfrac{4}{\rho^3}+\dfrac{a^2}{\rho^5}\right)$

$$V(\rho) = -\int f(\rho)\,d\rho = \gamma^2\int\left(\frac{4}{\rho^3}+\frac{a^2}{\rho^5}\right)d\rho = \gamma^2\left(-\frac{2}{\rho^2}-\frac{a^2}{4\rho^4}\right)$$

$$V_{eff}(\rho) = -\gamma^2\left(\frac{2}{\rho^2}+\frac{a^2}{4\rho^4}\right)+\frac{\ell^2}{2\rho^2} = \frac{2(\ell^2-4\gamma^2)\rho^2-\gamma^2a^2}{4\rho^4}$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{eff}(\rho) = -\infty$$

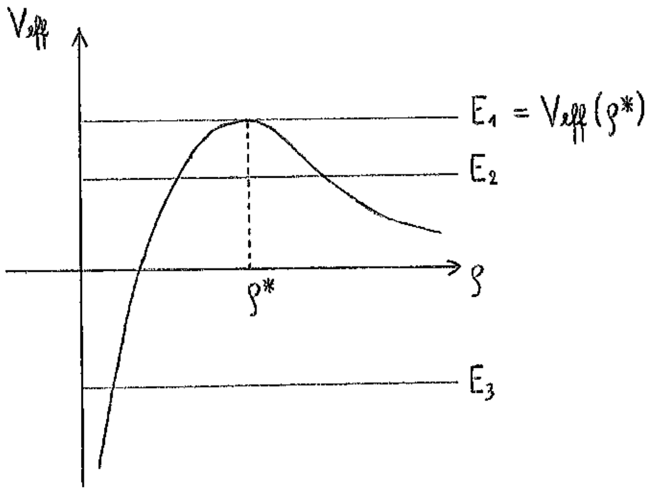
$$\lim_{\rho \to +\infty} V_{eff}(\rho) = \begin{cases} 0 \text{ per valori positivi se } \ell^2 - 4\gamma^2 > 0 \\ 0 \text{ per valori negativi se } \ell^2 - 4\gamma^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$V'_{eff}(\rho) = -\gamma^2\left(-\frac{4}{\rho^3} - \frac{a^2}{\rho^5}\right) - \frac{\ell^2}{\rho^3} = \frac{4\gamma^2\rho^2 + \gamma^2 a^2 - \ell^2\rho^2}{\rho^5} = \frac{(4\gamma^2 - \ell^2)\rho^2 + \gamma^2 a^2}{\rho^5}$$

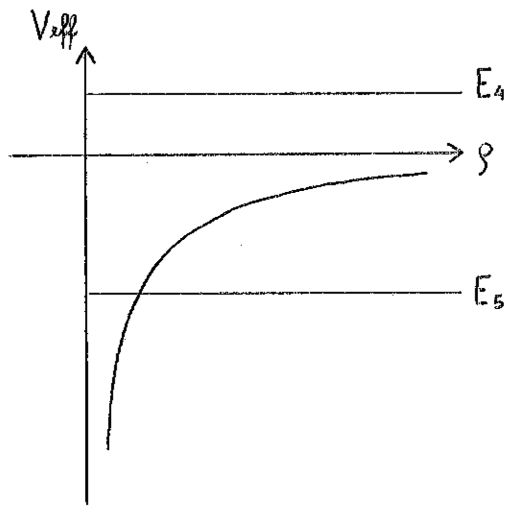
$V'_{eff}(\rho) = 0 \quad \exists$ soluzione $\iff 4\gamma^2 - \ell^2 < 0 \iff \ell^2 - 4\gamma^2 > 0$

$$\rho^* = \frac{\gamma a}{\sqrt{\ell^2 - 4\gamma^2}}$$

a) $\ell^2 - 4\gamma^2 > 0$



b) $\ell^2 - 4\gamma^2 < 0$



Ricaviamo dalle condizioni iniziali il modulo del momento angolare ℓ (che è costante)

$$\ell = a\,\frac{3\gamma}{\sqrt{2}\,a} = \frac{3\gamma}{\sqrt{2}}$$

$\rightarrow \ \ell^2 = \frac{9}{2}\gamma^2, \quad \ell^2 - 4\gamma^2 = \frac{\gamma^2}{2} > 0$ (siamo nel caso a)

Calcoliamo l'integrale dell'energia dalle condizioni iniziali

$$E = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) = \frac{1}{2}\dot{\rho}(0)^2 + V_{eff}(\rho(0)) = (\text{vale } \dot{\rho}(0) = 0) = \overbrace{\frac{2(\gamma^2/2)a^2 - \gamma^2 a^2}{4a^2}}^{V_{eff}(a) = 0} = 0$$

Calcoliamo $V_{eff}(\rho^*)$

$$E_1 = V_{eff}(\rho^*) = \frac{1}{4(\rho^*)^4}\left[2\,\cancel{(\ell^2 - 4\gamma^2)}\,\frac{\gamma^2 a^2}{\cancel{(\ell^2 - 4\gamma^2)}} - \gamma^2 a^2\right] = \frac{(\ell^2 - 4\gamma^2)^2}{4(\gamma a)^4}(\gamma a)^2 = \frac{1}{16}\frac{\gamma^2}{a^2}$$

Si vede che $E < E_1$.

Utilizziamo l'equazione delle orbite scritta in questa forma

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{1}{\ell^2}\frac{d}{du}V_{eff}(1/u)$$

(vediamo come si ricava; ricordiamo che $\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2(E - V_{eff}(r))}$, segue che $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dV_{eff}}{dr}$, poi

$\frac{dr}{dt} = -\ell\frac{du}{d\theta}$ e $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\ell^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$, infine $\frac{dV_{eff}}{dr} = -u^2\frac{dV_{eff}}{du}$)

L'energia potenziale efficace in funzione di u (e per il particolare valore di ℓ^2 di questo problema) diventa

$$V_{eff}(u) = \frac{\Upsilon^2}{4}(u^2 - a^2 u^4)$$

$\frac{d}{du}V_{eff} = \frac{\Upsilon^2}{2}(u - 2a^2u^3)$ è la derivata

L'equazione differenziale diventa

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{2}{9\gamma^2}\frac{\Upsilon^2}{2}(u - 2a^2u^3) \longrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{2}{9}a^2u^3 - \frac{u}{9}$$

che è un'equazione differenziale nonlineare del secondo ordine.

Poniamo $v = \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{dv}{d\theta} = \frac{dv}{du}\frac{du}{d\theta} = v\frac{dv}{du}$

$\Rightarrow v\frac{dv}{du} = \frac{2}{9}a^2u^3 - \frac{u}{9}$ che è un'equazione differenziale del primo ordine in $v(u)$

$$\int v\,dv = \int\left(\frac{2}{9}a^2u^3 - \frac{1}{9}u\right)du \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{1}{18}a^2u^4 - \frac{1}{18}u^2 + c_1$$

$$v^2 = \frac{1}{9}a^2u^4 - \frac{u^2}{9} + c_2$$

Cerchiamo di calcolare c_2. Prendiamo la retta $\theta = 0$ e supponiamo che all'inizio del moto il punto sia su tale retta

$$t = 0,\quad \rho(0) = a,\quad u = 1/a$$

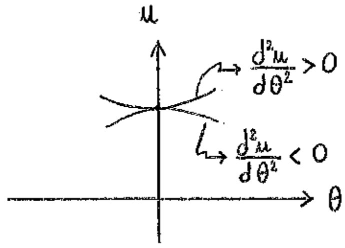
$$\dot\rho(0) = 0,\quad v = \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\dot\rho}{\dot\theta},\quad v(0) = 0$$

$$0^2 = \frac{1}{9}a^2\left(\frac{1}{a}\right)^4 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}\right)^2 + c_2 \longrightarrow c_2 = 0$$

$$v^2 = \frac{u^2}{9}(u^2a^2 - 1) \longrightarrow v = \pm\frac{u}{3}\sqrt{a^2u^2 - 1} = \frac{du}{d\theta}$$

per scegliere il segno corretto guardiamo il segno della derivata seconda $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ all'istante iniziale

$$\left.\frac{d^2u}{d\theta^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{9a} > 0$$



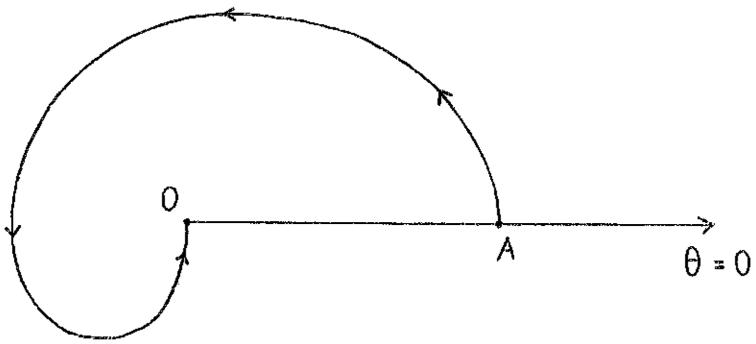
segue che (si veda la figura) u deve crescere con θ, quindi

$$v = \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{3} u \sqrt{a^2u^2 - 1}$$

Integriamo per separazione di variabili

$$\theta = 3 \int \frac{du}{u\sqrt{a^2u^2-1}} \underset{\substack{\downarrow \\ \rho = \frac{1}{u}\,,\ du = -\frac{1}{\rho^2} d\rho}}{=} -3 \int \frac{d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = -3 \int \frac{d\rho}{a\sqrt{1-(\rho/a)^2}} \longrightarrow$$

$$\theta = 3 \arccos(\rho/a) \qquad \rho = a\cos(\theta/3)$$ che è l'equazione polare dell'orbita



$$\rho = 0 \iff \theta = \frac{3}{2}\pi$$

Per calcolare il tempo per raggiungere $\rho = 0$ si utilizza la conservazione del momento angolare

$$\rho^2 \dot\theta = \frac{3\gamma}{\sqrt{2}} \implies a^2\cos^2(\theta/3)\,\dot\theta = \frac{3\gamma}{\sqrt{2}}$$

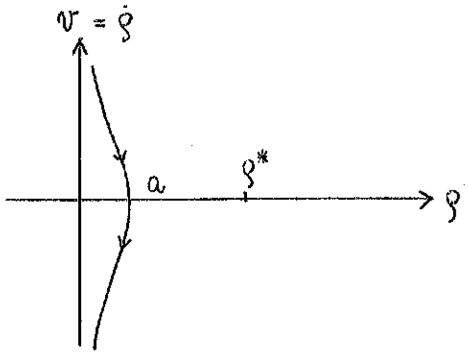
$$a^2 \int_0^{3\pi/2} \cos^2(\theta/3)\, d\theta = \frac{3\gamma}{\sqrt{2}} \int_0^T dt$$

$$T = \frac{\sqrt{2}}{3\gamma} a^2 \int_0^{3\pi/2} \cos^2(\theta/3)\, d\theta \underset{\substack{\downarrow \\ s = \theta/3 \\ ds = d\theta/3}}{=} \frac{\sqrt{2}}{3\gamma} a^2\, 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 s\, ds = \frac{\sqrt{2}\,a^2}{\gamma} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2s + 1}{2}\, ds =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,a^2}{2\gamma} \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}\,a^2}{2\gamma}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{a^2}{\gamma}\pi$$

NOTA (sull'esercizio precedente)

Per $\rho = a$ si ha $V_{eff}(a) = 0$ e la curva di livello che si riferisce ad $E = 0$ è



La condizione iniziale è il punto $(a, 0)$ da cui si vede che ρ diminuisce nel tempo e per $t = T$ si ottiene $\rho = 0$.