Moti unidimensionali

Repulsore armonico

$$\ddot{x} = \omega^2 x \qquad (m = 1)$$

$$V(x) = -\int \omega^2 x \, dx =$$

$$-\frac{\omega^2 x^2}{2} + c$$

$$V(x) = -\frac{\omega^2 x^2}{2}$$

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{\omega^2 x^2}{2} = T(\dot{x}) + V(x)$$

Sia $\hat{E}$ il valore fissato dell'energia

$\hat{E} > 0$ $\qquad \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \hat{E} + \frac{\omega^2 x^2}{2} > 0$ $\qquad \dot{x}$ non si annulla mai

→ famiglia di iperboli con asse di simmetria dato da $x = 0$

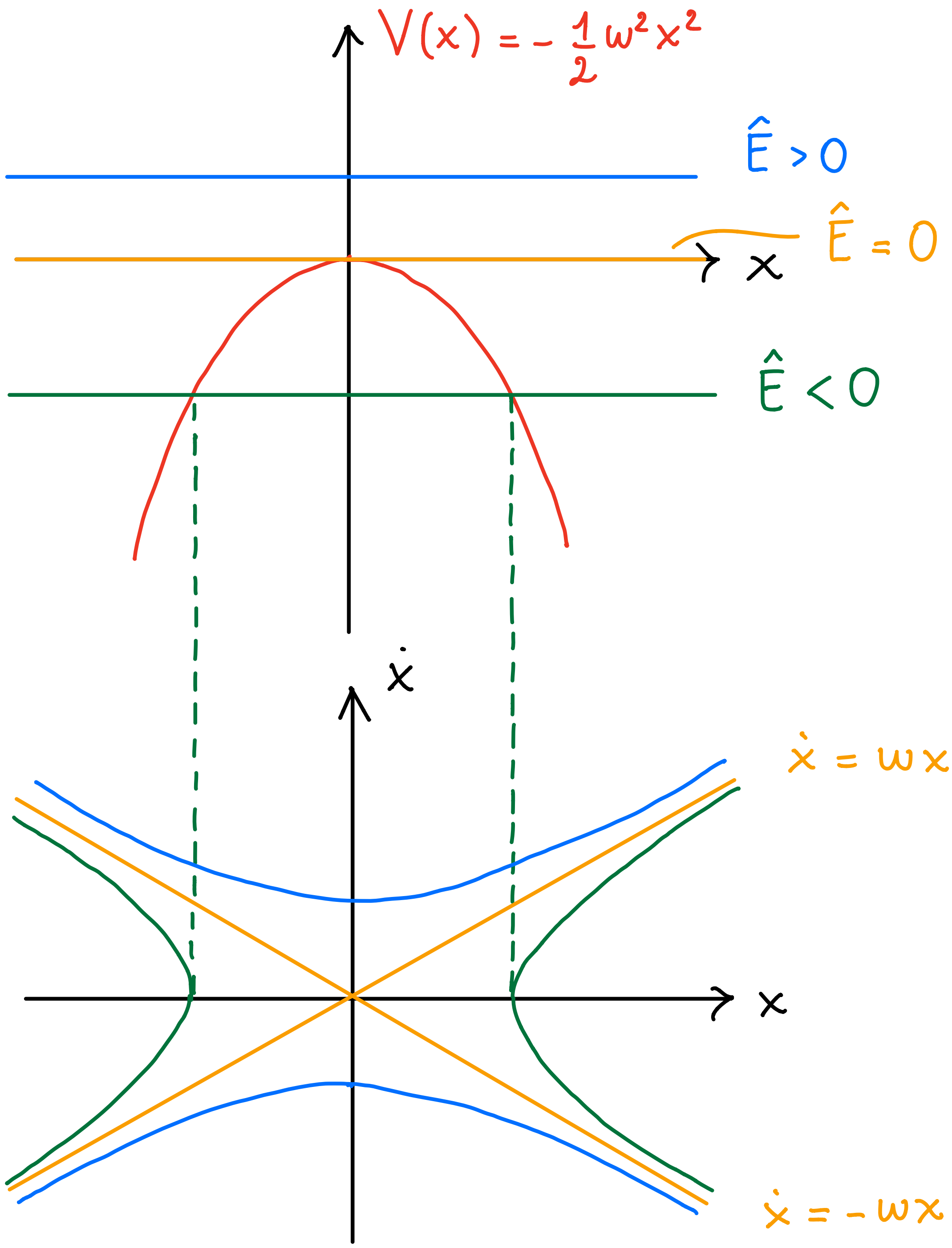
$\hat{E} < 0$ $\qquad \frac{\omega^2 x^2}{2} = -\hat{E} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 > 0$ $\qquad x$ non si annulla mai

→ famiglia di iperboli con asse di simmetria dato da $y = 0$

$\forall \hat{E} < 0$ si ha che $\dot{x}$ si annulla due volte

$\hat{E} = 0$ $\qquad \dot{x}^2 = \omega^2 x^2 \qquad \dot{x} = \omega x$

$\dot{x} = -\omega x$



Oscillatore armonico

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$V(x) = -\int(-\omega^2 x)\,dx = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + c$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

$$E(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

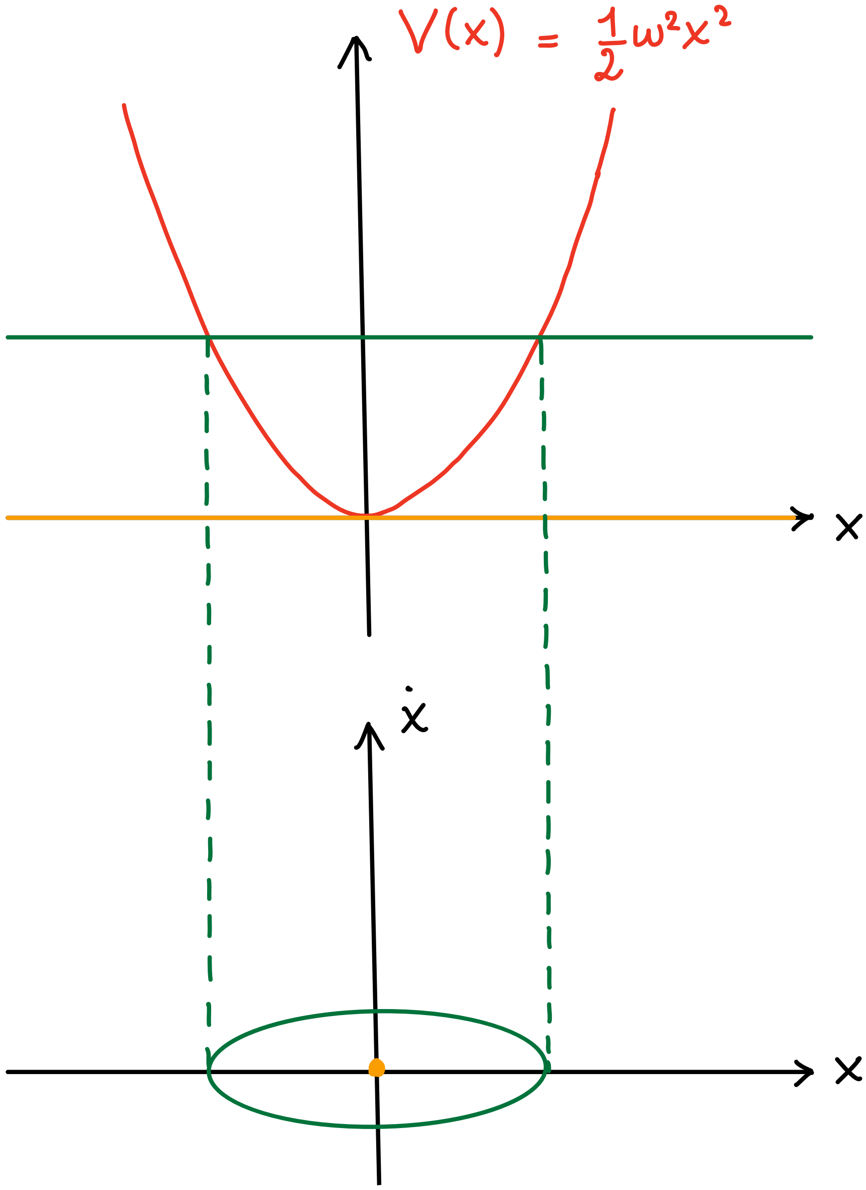
Sia $\hat{E}$ il valore prefissato dell'energia, necessariamente deve essere $\hat{E} \geq 0$

$\hat{E} = 0$ $\qquad \dot{x}^2 = -\omega^2 x^2 \iff x = \dot{x} = 0$

$\hat{E} > 0$ $\qquad \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \hat{E}$

$$\frac{\dot{x}^2}{2\hat{E}} + \frac{x^2}{2\hat{E}/\omega^2} = 1$$

$\longrightarrow$ famiglia di ellissi con centro in $(x,\dot{x}) = (0,0)$ e assi di simmetria dati da $x = 0$, $\dot{x} = 0$



Esercizi proposti

1) Disegnare il ritratto di fase sul piano $(x, \dot{x})$ per un moto unidimensionale con

$$V(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3, \quad \alpha > 0$$

2) Disegnare il ritratto di fase sul piano $(x, \dot{x})$ per un moto unidimensionale con

$$V(x) = -\frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^4, \quad \alpha > 0$$

Esercizio (11 settembre 2018)

Un corpo di massa m è soggetto ad una forza centrale

$$\vec{F}(\rho) = f(\rho)\,\frac{\vec{x}}{\rho}\,, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

dove $\rho = |\vec{x}|$ e

$$f(\rho) = -\rho\, e^{-\rho^2}$$

Assumendo che $c \neq 0$

1) Scrivere l'equazione implicita che definisce il raggio vettore delle orbite circolari

Sol. 1)

$$V(\rho) = -\int f(\rho)\, d\rho = +\int \rho\, e^{-\rho^2} d\rho$$

poniamo $\rho^2 = t \rightarrow 2\rho\, d\rho = dt$

$$V(\rho) = \int \frac{1}{2} e^{-t}\, dt = -\frac{1}{2} e^{-t} + d$$

$t = t(\rho)$

costante

$$V(\rho) = -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \qquad (d=0)$$

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{2}\left(2\rho e^{-\rho^2}\right) - \frac{c^2}{m\rho^3}$$

$$= \underbrace{\rho e^{-\rho^2}}_{=-f(\rho)} - \frac{c^2}{m\rho^3}$$

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}(\rho)}{d\rho} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \rho e^{-\rho^2} - \frac{c^2}{m\rho^3} = 0$$

$$\frac{m\rho^4 e^{-\rho^2} - c^2}{m\rho^3} = 0$$

l'equazione cercata è $m\rho^4 e^{-\rho^2} - c^2 = 0$

2) Discutere il numero di orbite circolari al variare di c. Qual è il valore massimo di c per cui ne è garantita l'esistenza?

Sol. 2)

Partiamo da

$$\rho^4 e^{-\rho^2} = c^2/m$$

Sia $g(\rho) = \rho^4 e^{-\rho^2}$, disegniamo il grafico di questa funzione

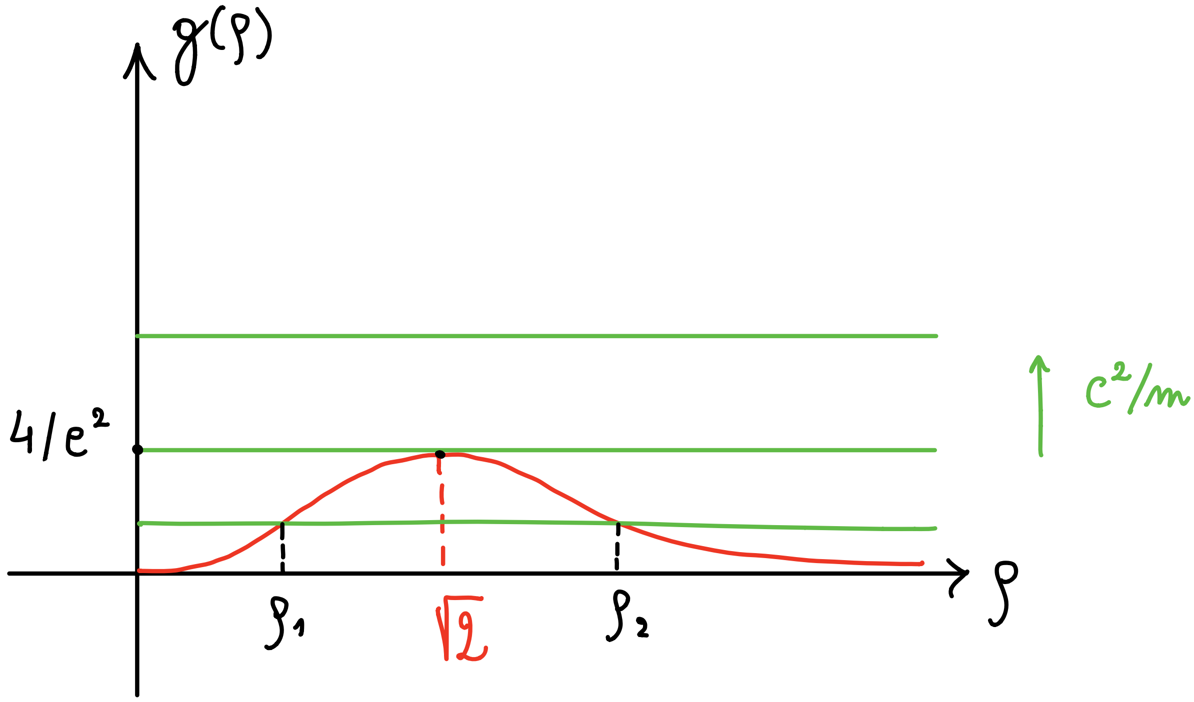
$$g(\rho) > 0$$

$$\lim_{\rho \to +\infty} g(\rho) = 0 \qquad \lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0$$

$$g'(\rho) = 4\rho^3 e^{-\rho^2} - 2\rho \cdot \rho^4 e^{-\rho^2}$$

$$= 2\rho^3 e^{-\rho^2}(2-\rho^2) = 0$$

$$\rho = 0 \qquad \rho = \sqrt{2}$$



introduciamo

$$h(\rho) = c^2/m$$

Calcoliamo $g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 e^{-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{4}{e^2}$

Ci sono tre casi:

1) $\dfrac{c^2}{m} = \dfrac{4}{e^2} \longrightarrow c^2 = \dfrac{4m}{e^2}$

$$|c| = \frac{2\sqrt{m}}{e}$$

esiste una tr. circolare di raggio $\rho = \sqrt{2}$

2) $\frac{c^2}{m} > \frac{4}{e^2} \longrightarrow |c| > \frac{2\sqrt{m}}{e}$

non ci sono traiettorie circolari

3) $\frac{c^2}{m} < \frac{4}{e^2} \longrightarrow |c| < \frac{2\sqrt{m}}{e}$

ci sono due traiettorie circolari di raggi

$$\rho_1 < \sqrt{2}, \quad \rho_2 > \sqrt{2}$$

Quindi $|c| = \frac{2\sqrt{m}}{e}$ è il valore massimo di $|c|$

per cui è garantita l'esistenza di tr. circolari.

Esercizio (29 gennaio 2019)

punto materiale P di massa m libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$V(\rho) = k \log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)$$

$k, r > 0$

1) Calcolare $\vec{F}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

Sol. 1)

$$\vec{F}(\vec{x}) = f(\rho)\,\frac{\vec{x}}{\rho}$$

$$f(\rho) = -\frac{dV(\rho)}{d\rho} = -k\,\frac{1}{1+\rho^2/r^2}\,\frac{2\rho}{r^2}$$

$$= -\frac{2k\rho}{r^2+\rho^2}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{2k}{r^2+\rho^2}\,\vec{x}$$

Consideriamo cond. iniz. per cui $c = 2r\sqrt{km}$

2) Mostrare che esiste un'unica traiettoria circolare e trovarne il raggio in funzione di r

Sol. 2)

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2} =$$

$$k \log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}}{d\rho} = \frac{2k\rho}{r^2+\rho^2} - \frac{c^2}{m\rho^3} =$$

$$\frac{2km\rho^4 - c^2(r^2+\rho^2)}{m\rho^3(r^2+\rho^2)} = 0$$

$$(2km)\rho^4 - c^2\rho^2 - c^2 r^2 = 0$$

$$\rho^2 = t$$

$$(2km)t^2 - c^2 t - c^2 r^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 + 8kmr^2c^2}}{4km}$$

ora usiamo $c = 2r\sqrt{km}$, $c^2 = 4r^2km$

$$t_{1,2} = \frac{4kmr^2 \pm \sqrt{16k^2m^2r^4 + (8kmr^2)(4kmr^2)}}{4km}$$

$$= r^2 \pm \frac{\sqrt{48k^2m^2r^4}}{4km} = r^2(1 \pm \sqrt{3})$$

$$\rightarrow \quad t = r^2(1+\sqrt{3})$$

$$\rho^* = r\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

3) Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$

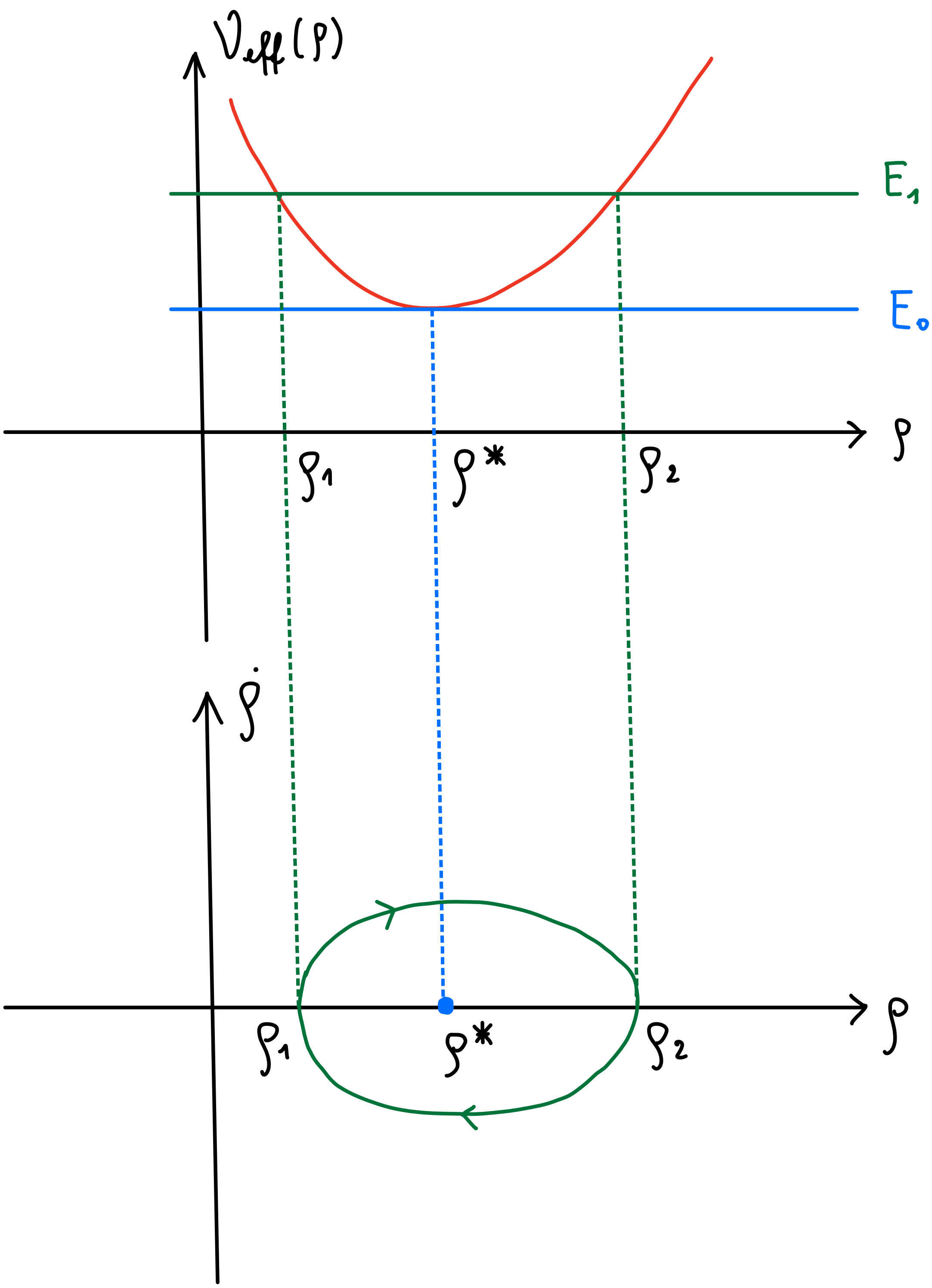
Sol. 3)

$$V_{eff}(\rho) = k \log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}r^2 k \cancel{m}}{\cancel{2}\cancel{m}\rho^2} =$$

$$k \log\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) + \frac{2r^2k}{\rho^2}$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{eff}^{(c)}(\rho) = +\infty$$

$$\lim_{\rho \to +\infty} V_{eff}^{(c)}(\rho) = +\infty$$



4) Trovare il valore minimo E_{min} dell'energia totale

Sol. 4)

$$E_{min} = V_{eff}(\rho^*) = k\left[\log\left(2+\sqrt{3}\right) + \sqrt{3} - 1\right]$$

Regola dei segni di Cartesio

Dato un polinomio a coefficienti reali

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con coeff. non tutti nulli, la regola di Cartesio dice che

il massimo numero di radici reali positive di $p(x)$ è dato dal numero di cambiamenti di segno fra coefficienti consecutivi, trascurando eventuali coefficienti nulli

---

Esercizio (26 giugno 2018)

Consideriamo un punto materiale di massa m in un campo di forze centrali

$$\vec{F}(\rho) = f(\rho) \frac{\vec{x}}{\rho}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

$$f(\rho) = A\rho - B, \quad \rho = |\vec{x}|, \quad A > 0, \quad B > 0$$

Assumiamo che esista un valore $\bar{\rho}$ t.c.

$$c^2 < m\left(-A\bar{\rho}^4 + B\bar{\rho}^3\right)$$

($\bar{\rho}$ valore assunto da ρ)

1) Mostrare che esistono due valori ρ_1, ρ_2 che corrispondono a due traiettorie circolari (suggerimento: usare la regola dei segni di Cartesio)

Sol. 1)

$$V(\rho) = -\int f(\rho)\, d\rho$$

$$= -\int (A\rho - B)\, d\rho = \int (-A\rho + B)\, d\rho$$

$$= -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho$$

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

$$\frac{dV_{eff}^{(c)}(\rho)}{d\rho} = -A\rho + B - \frac{c^2}{m\rho^3}$$

$$= \frac{-Am\rho^4 + Bm\rho^3 - c^2}{m\rho^3} = 0$$

Consideriamo il polinomio

$$-Am\rho^4 + Bm\rho^3 - c^2$$

e notiamo che essendo $A > 0$, $B > 0$, ci sono due cambi di segno dei coefficienti

$$(-Am) \qquad (Bm) \qquad (-c^2)$$

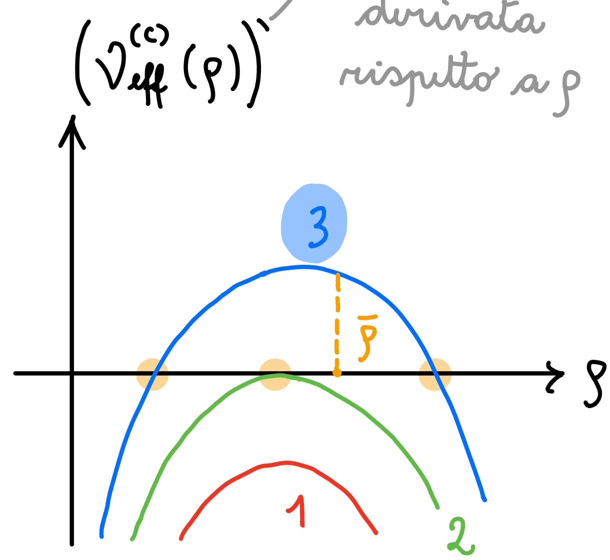
Questo significa che il polinomio ha al più due zeri positivi.

Per dimostrare che sono proprio due calcoliamo i limiti

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{dV_{eff}^{(c)}(\rho)}{d\rho} = -\infty$$

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{dV_{eff}^{(c)}(\rho)}{d\rho} = -\infty$$

Dalle informazioni che abbiamo possiamo essere in uno dei tre casi in figura



indica la derivata rispetto a ρ

Vogliamo dimostrare che siamo nel caso 3.

Non abbiamo ancora usato l'ipotesi

$$c^2 < m\left(B\bar{\rho}^3 - A\bar{\rho}^4\right)$$

Torniamo all'espressione di $\left(V_{eff}^{(c)}(\rho)\right)'$:

$$\frac{-Am\rho^4 + mB\rho^3 - c^2}{m\rho^3}$$

Se esistesse un valore di ρ t.c. $\left(V_{eff}^{(c)}(\rho)\right)' > 0$ allora potremmo dire con certezza che siamo nel caso 3. Dovremmo avere

$$-Am\bar{\rho}^4 + mB\bar{\rho}^3 - c^2 > 0$$

per qualche $\bar{\rho}$, cioè

$$c^2 < m\left(B\bar{\rho}^3 - A\bar{\rho}^4\right)$$

che è proprio la nostra ipotesi

Segue che $\exists\ \rho_1, \rho_2$, $\rho_2 > \rho_1$ t.c.

$$\left(V_{eff}^{(c)}(\rho_1)\right)' = \left(V_{eff}(\rho_2)\right)' = 0$$

e quindi esistono due traiettorie circolari

2)

Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$

Sol. 2)

Ricordo che

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2}, \quad \begin{array}{l} A>0 \\ B>0 \end{array}$$

dal punto 1) sappiamo che questa funzione ha due punti critici ρ_1, ρ_2, inoltre

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{eff}^{(c)}(\rho) = +\infty$$

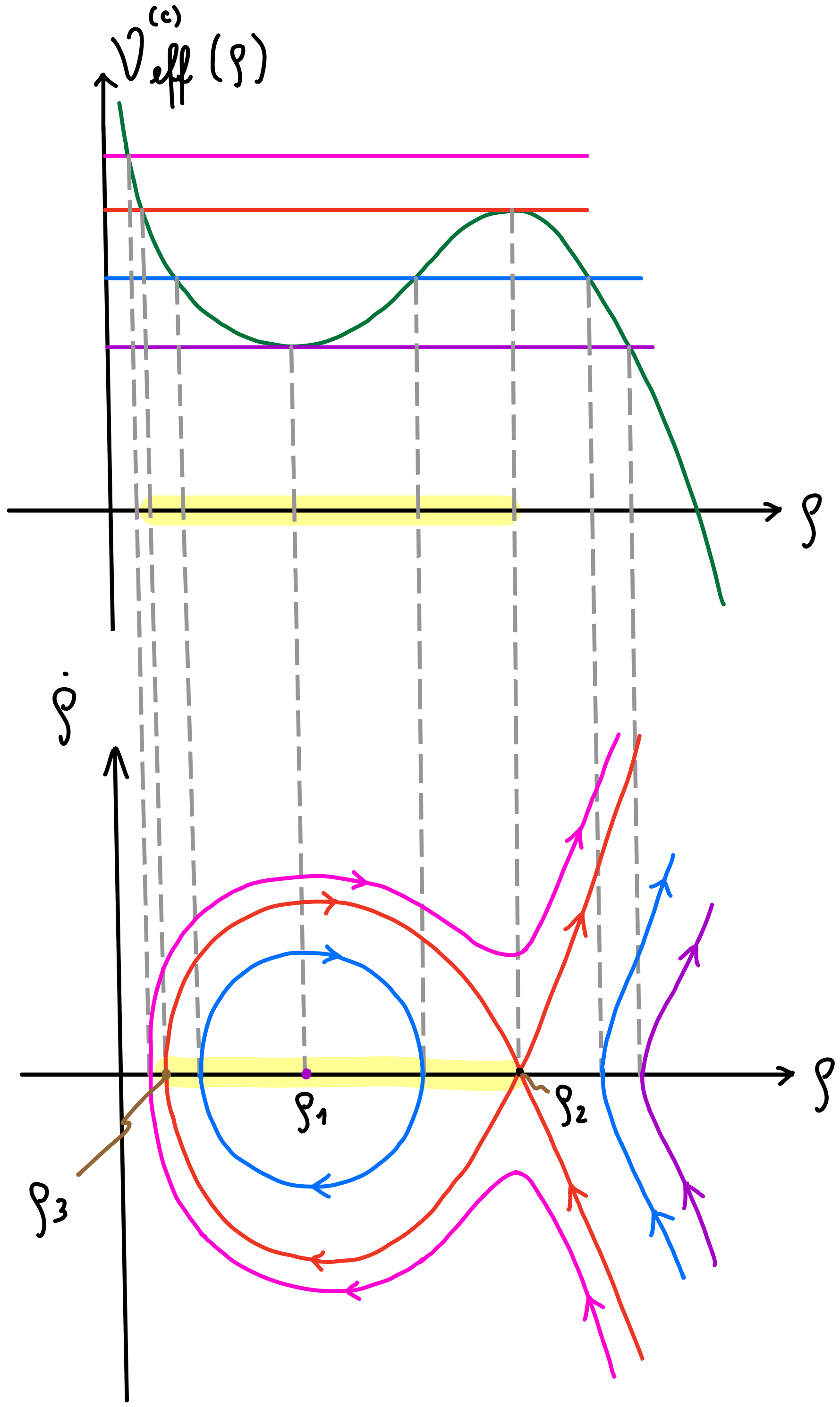
$$\lim_{\rho \to +\infty} V_{eff}^{(c)}(\rho) = -\infty$$

$$V_{eff}^{(c)}(\rho) = 0 \longrightarrow \frac{-Am\rho^4 + 2mB\rho^3 + c^2}{2m\rho^2} = 0$$

$$-Am\rho^4 + 2mB\rho^3 + c^2 = 0$$

c'è un cambio di segno, quindi il polinomio si annulla in al più un valore di $\rho > 0$

tenendo conto dei limiti calcolati sopra possiamo dire che $V_{eff}^{(c)}(\rho)$ si annulla una volta



3) Trovare i periodi delle orbite circolari

Sol. 3)

$$m\rho^2 \dot{\theta} = c$$

$$m\rho_1^2 \dot{\theta} = c \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{c}{m\rho_1^2}$$

con ρ_1 costante

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{m\rho_1^2} \longrightarrow dt = \frac{m\rho_1^2}{|c|} d\theta$$

$$\int_0^{T_1} dt = \int_0^{2\pi} \frac{m\rho_1^2}{|c|} d\theta = \frac{m\rho_1^2}{|c|} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$T_1 = \frac{2\pi m \rho_1^2}{|c|}$$; analogamente troviamo

$$T_2 = \frac{2\pi m \rho_2^2}{|c|}$$

4) Consideriamo il moto $\rho(t)$ con cond. iniziale

$$\rho_0 = \left(\frac{3c^2}{mA}\right)^{1/4}, \quad \dot{\rho}_0 = 0$$

mostrare che la traiettoria $(\rho, \dot{\rho})$ è limitata

Suggerimento: calcolare la derivata seconda di $V_{eff}(\rho)$

Sol. 4)

$$\left(V_{eff}^{(c)}(\rho)\right)' = -A\rho + B - \frac{c^2}{m\rho^3}$$

$$\left(V_{eff}^{(c)}(\rho)\right)'' = -A + \frac{3c^2}{m\rho^4} = 0$$

$$-Am\rho^4 + 3c^2 = 0$$

$$\rho^4 = \frac{3c^2}{Am}$$

$$\rho_0 = \left(\frac{3c^2}{Am}\right)^{1/4}$$ che è la cond. iniziale data per ρ

ρ_0 è un punto di flesso di $V_{eff}^{(c)}(\rho)$ e quindi necessariamente $\rho_3 < \rho_0 < \rho_2$ (cioè ρ_0 deve appartenere all'intervallo evidenziato in giallo nella figura sopra), dove ρ_3 è un punto di inversione per il livello di energia $\bar{E} = V_{eff}^{(c)}(\rho_2)$.

Segue che la traiettoria $(\rho, \dot{\rho})$ è chiusa e limitata