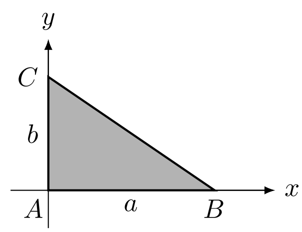
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

7 Gennaio 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Axyz$. Sul piano Axy si consideri una lamina omogenea triangolare di vertici A, B, C e massa m. Il triangolo ABC è rettangolo in A e le lunghezze dei lati AB, CA sono uguali ad a, b, rispettivamente. Si noti che i lati AB, CA sono paralleli agli assi Ox, Oy (si veda la figura).

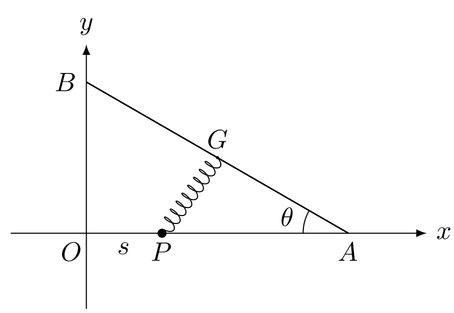


i) Si mostri che il riferimento $Axyz$ non è principale di inerzia.

ii) Calcolare il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse passante per B, C.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un'asta AB omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ e da un punto materiale P di massa M. Gli estremi A, B dell'asta possono scivolare lungo gli assi Ox, Oy, rispettivamente, e il punto materiale P può spostarsi lungo l'asse Ox. Il baricentro G dell'asta è collegato al punto P da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (si veda la figura). Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito.



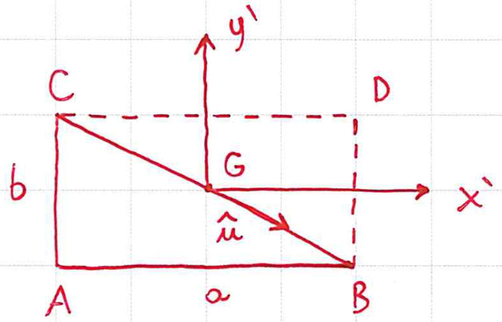
Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s di P e l'angolo θ formato dall'asta con l'asse Ox, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.

ES. 1

i) Basta notare che per ogni punto della lamina vale

$o \quad xy = 0 \quad o \quad xy > 0$, segue che $I_{12} \neq 0$

ii)



consideriamo il punto medio di BC, cioè G

calcoliamo la matrice di inerzia del rettangolo ABCD rispetto a $Gx'y'z'$; si ha con conti che si possono fare quasi a mente

$$I_{Gx'} = \frac{(2m)\,b^2}{12} \qquad I_{Gy'} = \frac{(2m)\,a^2}{12}$$

$$I_{Gz'} = \frac{(2m)}{12}(a^2+b^2) \qquad I_{Gx'y'} = 0$$

introduco quindi $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,-b,0)^T$

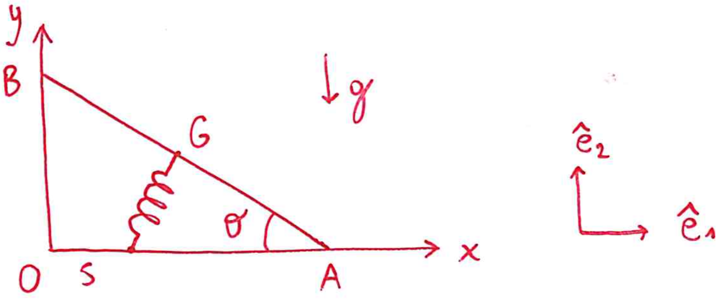
il momento di inerzia desiderato è

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,-b,0)\ \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}}}_{}\ \frac{(\cancel{2}m)}{12}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+b^2} \\ -b/\sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

i momenti di inerzia della lamina triangolare sono metà di quelli trovati sopra

$$I = \frac{m}{6}\,\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

ES. 2



$$\vec{x}_G = \ell\cos\theta\,\hat{e}_1 + \ell\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_2$$

$$V(\theta,s) = mg\ell\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}k\left[(\ell\cos\theta - s)^2 + \ell^2\text{sen}^2\theta\right]$$

$$= mg\ell\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}k\left(s^2 - 2\ell s\cos\theta + \ell^2\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mg\ell\cos\theta + k\ell s\,\text{sen}\,\theta = 0 \\ ks - k\ell\cos\theta = 0 \quad \longrightarrow \quad s = \ell\cos\theta \end{cases}$$

$$mg\cancel{\ell}\cos\theta + k\ell^{\cancel{2}}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\cos\theta\,(mg + k\ell\,\text{sen}\,\theta) = 0$$

$\cos\theta = 0$ $\qquad$ $\underline{\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad s_1 = 0}$, $\quad$ $\underline{\theta_2 = \frac{3\pi}{2} \quad s_2 = 0}$

$\text{sen}\,\theta = -\gamma$, $\quad \gamma = \dfrac{mg}{k\ell}$, $\quad$ se $\gamma < 1$

$$\underline{\theta_3 = -\text{arcsen}\,\gamma \qquad s_3 = \ell\sqrt{1-\gamma^2}}$$

$$\underline{\theta_4 = \pi - \theta_3 \qquad s_4 = -\ell\sqrt{1-\gamma^2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -mg\ell\,\text{sen}\,\theta + k\ell\cos\theta \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial \theta} = k\ell\,\text{sen}\,\theta$$

$$V''(\theta,s) = \begin{pmatrix} -mg\ell\,\text{sen}\,\theta + k\ell\cos\theta & k\ell\,\text{sen}\,\theta \\ k\ell\,\text{sen}\,\theta & k \end{pmatrix}$$

(θ_1, s_1)

$$V''(\theta_1, s_1) = \begin{pmatrix} -mgl & kl \\ kl & k \end{pmatrix}, \quad \det V''(\theta_1,s_1) = -mglk - k^2l^2 < 0$$

(θ_1, s_1) è INSTABILE

(θ_2, s_2)

$$V''(\theta_2, s_2) = \begin{pmatrix} mgl & -kl \\ -kl & k \end{pmatrix}, \quad \det V''(\theta_2,s_2) = mglk - k^2l^2$$

se $mg < kl$ $(\gamma < 1)$

(θ_2, s_2) è INSTABILE

se $mg > kl$ $(\gamma > 1)$

(θ_2, s_2) è STABILE dato che

$\operatorname{tr} V''(\theta_2, s_2) > 0$

(θ_3, s_3) e (θ_4, s_4)

$$V''(\theta_3, s_3) = V''(\theta_4, s_4) = \begin{pmatrix} mgl\gamma + kl^2(1-\gamma^2) & -kl\gamma \\ -kl\gamma & k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} kl^2 & -mg \\ -mg & k \end{pmatrix} \qquad \det V''(\theta_3, s_3) = k^2l^2 - m^2g^2$$

quando esistono $(mg < kl)$ queste 2 conf. di eq. sono STABILI dato che si ha anche

$\operatorname{tr} V''(\theta_3, s_3) > 0$

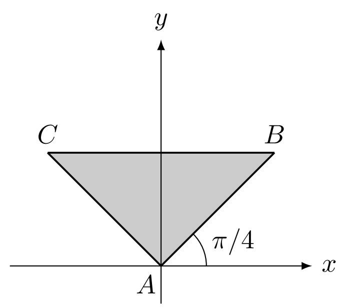
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

24 Gennaio 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Axyz$. Sul piano Axy si consideri una lamina triangolare omogenea di massa m e di vertici A, B, C. Il triangolo ABC è rettangolo in A e si ha $AB = AC = \ell$. Inoltre l'inclinazione del lato AB rispetto all'asse Ax è uguale a $\pi/4$ (si veda la figura).

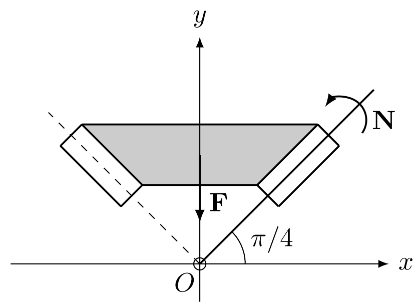


i) Determinare una terna principale di inerzia per il polo A motivando la risposta.

ii) Calcolare la matrice di inerzia della lamina rispetto al sistema di riferimento $Axyz$.

Secondo Esercizio

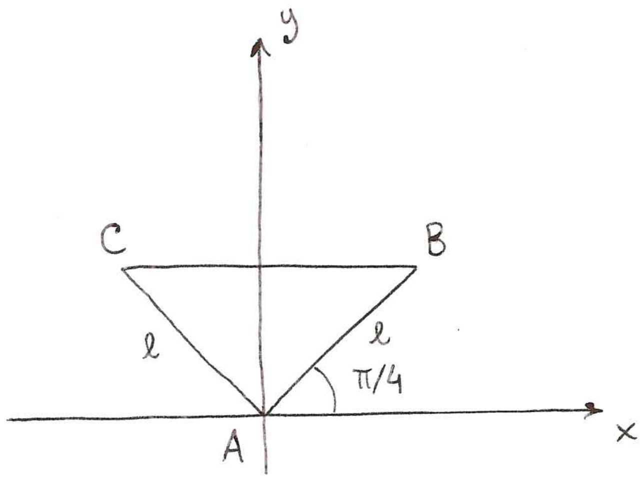
Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Nel piano Oxy si consideri un sistema meccanico in equilibrio formato da un'asta e da un corpo rigido $\mathcal{C}$. Un estremo dell'asta è collegato tramite una coppia rotoidale fissa all'origine O, mentre l'altro estremo è libero. Inoltre l'asta è inclinata di $\pi/4$ rispetto all'asse Ox. Il corpo $\mathcal{C}$ è vincolato all'asta tramite una coppia prismatica, e una seconda coppia prismatica vincola $\mathcal{C}$ ad una guida fissa passante per O e la cui direzione è perpendicolare a quella dell'asta (si veda la figura).
Sull'asta agisce una coppia di momento pari ad $\mathbf{N} = (0, 0, N)$, $N > 0$. Sul punto di coordinate $(0, h, 0)$, $h > 0$, appartenente a $\mathcal{C}$ agisce la forza $\mathbf{F} = (0, -F, 0)$, $F > 0$. Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito.

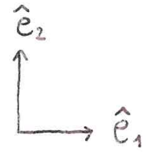


Determinare le reazioni vincolari che agiscono sull'asta e sul corpo $\mathcal{C}$; in particolare per ciascuna coppia prismatica si individui, se esiste, l'asse centrale del sistema delle reazioni vincolari esplicate dalla coppia.

ESERCIZIO 1

$\sigma = \frac{2m}{\ell^2}$





i) $Axyz$ è una terna principale di inerzia, infatti

*) il piano $\perp$ al piano Axy e passante per Ay è di simmetria per riflessione $\rightarrow$ Ax è un asse principale di inerzia

*) il piano Axy è di simmetria per riflessione $\rightarrow$ Az è un asse principale di inerzia

ii) sapendo che il momento di inerzia di un quadrato di massa $2m$ e lato l rispetto ad un qualunque asse passante per il baricentro e che appartenga al piano su cui giace il quadrato è

$$\frac{(2m)\,\ell^2}{12}$$

trovo $\underline{I_{A\hat{e}_2} = \frac{m\ell^2}{12}}$

$$\underline{I_{A\hat{e}_1}} = 2\sigma \int_0^{\ell\sqrt{2}/2} \int_x^{\ell\sqrt{2}/2} y^2\,dx\,dy = 2\sigma \int_0^{\ell\sqrt{2}/2} \frac{1}{3}\left(\frac{\ell^3\sqrt{2}}{4} - x^3\right)dx =$$

$$\frac{2\sigma}{3}\left(\frac{\ell^4}{4} - \frac{\ell^4}{16}\right) = \frac{\sigma\ell^4}{8} = \underline{\frac{m\ell^2}{4}}, \qquad I_A = m\ell^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2

Chiamiamo $\vec{\Phi}_0 = \Phi_{0x}\,\hat{e}_1 + \Phi_y\,\hat{e}_2$

la reazione in O

Chiamiamo $\vec{\Phi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi\,\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi\,\hat{e}_2$

la reazione della guida su C

Chiamiamo $\vec{\Phi}_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{12}\,\hat{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{12}\,\hat{e}_2$

la reazione di C sull'asta

1ª eq. cardinale intero sistema

$$\begin{cases} \Phi_{0x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi = 0 & (1) \\ \Phi_{0y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi - F = 0 & (2) \end{cases}$$

1° eq. cardinale asta

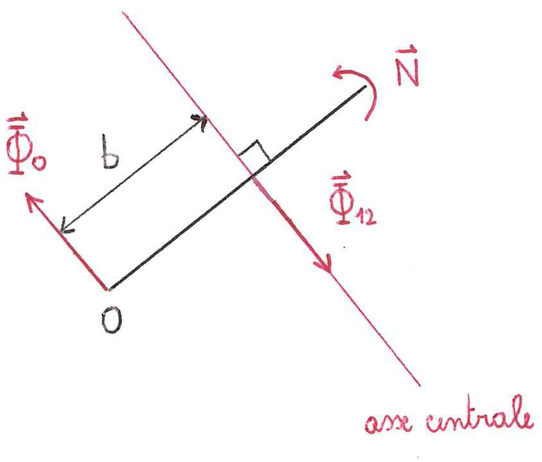
$$\begin{cases} \Phi_{0x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{12} = 0 & (3) \\ \Phi_{0y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{12} = 0 & (4) \end{cases}$$

da (1) e (3) $\longrightarrow$ $\Phi = \Phi_{12}$

riscrivo (2) $\longrightarrow$ $\Phi_{0y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{12} - F = 0$ e combino con (4) $\longrightarrow$

$\underline{\Phi_{0y} = \frac{F}{2}}$ $\longrightarrow$ $\underline{\Phi_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}F = \Phi}$ e infine $\underline{\Phi_{0x} = -\frac{F}{2}}$

asse centrale relativo a $\vec{\Phi}_{12}$

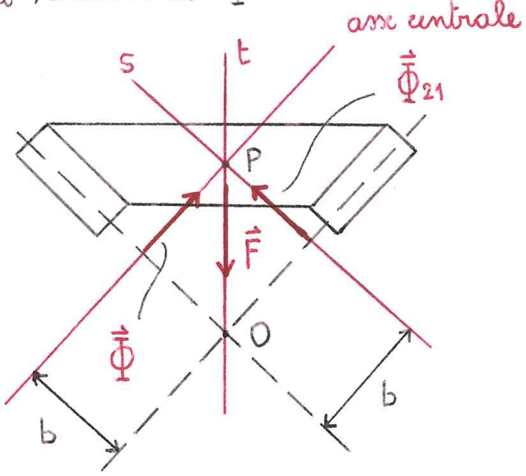


2ª eq. cardinale rispetto ad O

$$-b\,\Phi_{12} + N = 0$$

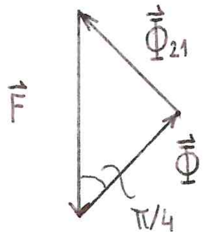
$$b = \frac{N}{\Phi_{12}} = \frac{\sqrt{2}\,N}{F}$$

asse centrale relativo a $\vec{\Phi}$



le rette s e t si intersecano nel punto $P \equiv (0, \sqrt{2}b)$

l'asse centrale cercato è una retta che passa per P ed è $\perp$ s



(triangolo delle forze, non era richiesto, giusto per completezza)

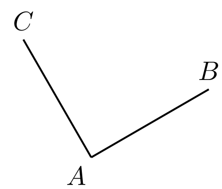
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

14 Febbraio 2022

Primo Esercizio

Si consideri una squadra omogenea costituita da due aste AB, AC uguali di lunghezza ℓ e massa m ciascuna saldate in A in modo da formare un angolo retto (si veda la figura).

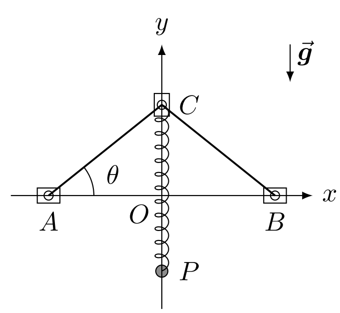


i) Dimostrare che ogni asse passante per A e giacente nel piano della squadra è un asse principale di inerzia.

ii) Calcolare il momento di inerzia della squadra rispetto all'asse passante per i punti B, C.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da due aste AC, BC, omogenee di massa m e lunghezza 2ℓ e da un punto materiale P di massa M. Gli estremi A, B possono scivolare lungo l'asse Ox e l'estremo C lungo l'asse Oy. Il punto materiale P può spostarsi lungo l'asse Oy. Il punto C è collegato al punto P da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (si veda la figura). Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usando come coordinate lagrangiane l'ordinata y_P di P e l'angolo θ formato dall'asta BC con l'asse Ox,

i) trovare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità;

ii) calcolare le frequenze proprie e i modi normali delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile del sistema.

ES. 1

i) Scriviamo le coordinate dei punti dell'asta AB

$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\,\text{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq \ell$$

e notiamo che $\quad xy = \rho^2\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$

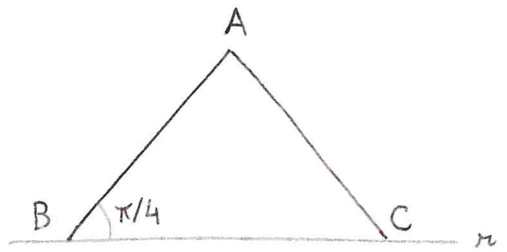
Scriviamo le coordinate dei punti dell'asta AC

$$\begin{cases} x = -\rho\,\text{sen}\,\alpha \\ y = \rho\cos\alpha \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq \ell$$

e notiamo che $\quad xy = -\rho^2\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$

Allora si avrà $\quad I_{12} = 0 \quad \forall\alpha \in [0, 2\pi)$.

ii)



$$I_r = 2\int_0^{\ell} \lambda\,\frac{s^2}{2}\,ds = \frac{\lambda}{3}\ell^3 = \frac{m\ell^2}{3}$$

ES.2

i) $V(\theta, y) = mgl\,\text{sen}\,\theta + mgl\,\text{sen}\,\theta + Mgy + \frac{1}{2}k\left(2l\,\text{sen}\,\theta + (-y)\right)^2$

$= 2mgl\,\text{sen}\,\theta + Mgy + \frac{1}{2}k\left(4l^2\text{sen}^2\theta + y^2 - 4ly\,\text{sen}\,\theta\right)$

Configurazioni di equilibrio

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2mgl\cos\theta + 4l^2k\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 2kly\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Mg + ky - 2lk\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\begin{cases} y = 2l\,\text{sen}\,\theta - Mg/k \\ 2l\cos\theta\,(mg - ky + 2lk\,\text{sen}\,\theta) = 0 \end{cases}$$

$\cos\theta = 0 \qquad \theta_1 = \pi/2\,, \quad \theta_2 = 3\pi/2$

$y_1 = 2l - \frac{Mg}{k} \quad y_2 = -2l - \frac{Mg}{k}$

$mg - 2k\cancel{l\,\text{sen}\,\theta} + Mg + 2k\cancel{l\,\text{sen}\,\theta} = 0 \qquad mg + Mg = 0 \quad (\text{mai})$

Stabilità

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -2mgl\,\text{sen}\,\theta + 4l^2k\cos 2\theta + 2kly\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y} = -2kl\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = k$$

$$V''(\theta_1, y_1) = \begin{pmatrix} 2l(-mg - 2lk + ky_1) & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2l(m+M)g & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$V''(\theta_2, y_2) = \begin{pmatrix} 2l(mg - 2lk - ky_2) & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l(m+M)g & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$\det V''(\theta_1, y_1) < 0 \longrightarrow (\theta_1, y_1)$ è instabile

$\det V''(\theta_2, y_2) > 0$ e $\operatorname{tr} V''(\theta_2, y_2) > 0 \longrightarrow (\theta_2, y_2)$ è stabile

ii) Frequenze proprie e modi normali

energia cinetica asta AC

$$T^{AC} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m (2\ell)^2\right)\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) m \ell^2 \dot\theta^2 = \frac{2}{3} m \ell^2 \dot\theta^2$$

energia cinetica del sistema

$$T = \frac{4}{3} m \ell^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} M \dot y^2$$

matrice cinetica

$$A = \begin{pmatrix} 8m\ell^2/3 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

$$\det\left(V''(\theta_2, y_2) - \lambda A\right) = \det \begin{pmatrix} 2\ell(m+M)g - \lambda_1 \frac{8}{3} m \ell^2 & 0 \\ 0 & k - \lambda_2 M \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}\frac{(m+M)g}{m\ell} \qquad \lambda_2 = \frac{k}{M}$$

le frequenze proprie sono $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$ e i modi normali sono dati da

$$c_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\, u_1 , \qquad c_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\, u_2$$

con $c_1, c_2 \geq 0$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in S^1$ costanti e

$$u_1 = (1, 0, 0)^T , \qquad u_2 = (0, 1, 0)^T$$

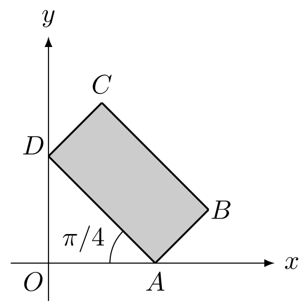
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

13 aprile 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri una lamina omogenea rettangolare di lati $DA = BC = \ell$ e $AB = CD = \ell/2$. Il lato AD è inclinato rispetto all'asse Ox di $\pi/4$ (si veda la figura).



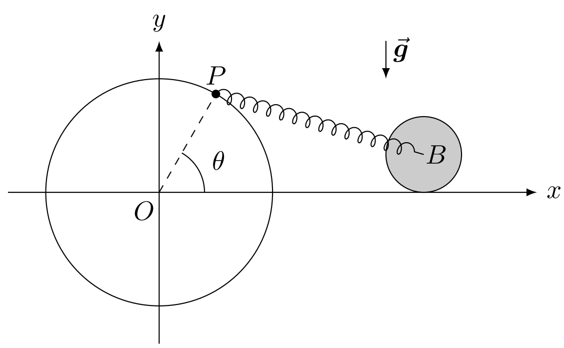
i) Trovare una terna principale di inerzia con polo in O, motivando la risposta.

ii) Calcolare i momenti principali di inerzia della lamina rispetto agli assi della terna trovata nel punto i).

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un punto materiale P di massa m che può muoversi lungo una guida circolare di raggio R e centro in O, e da un disco omogeneo di raggio $r < R$ e massa M che rotola senza strisciare sull'asse Ox. Il punto P è collegato al baricentro B del disco da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (si veda la figura). Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito e che valga la relazione

$$mg = 2kr.$$



Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s di B e l'angolo θ formato dal segmento OP con l'asse Ox, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.

ES. 1

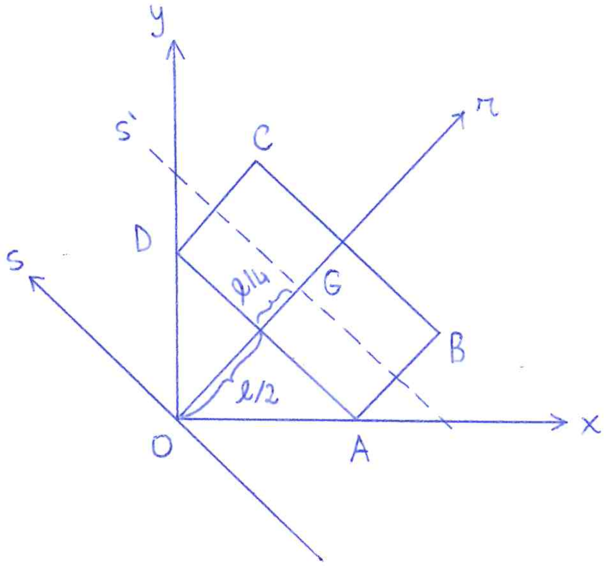
i) Il piano perpendicolare a Oxy e passante per O e il baricentro della lamina è un piano di simmetria per riflessione.

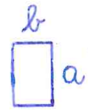
Segue che la bisettrice del 2° e 4° quadrante è un asse principale.

L'asse Oz è principale in quanto il piano Oxy è di simmetria per riflessione.

Si ha allora che la bisettrice del 1° e 3° quadrante è un asse principale.

ii)



I_r è un momento di inerzia fatto a lezione ($ma^2/12$ )

$$\underline{I_r = \frac{m\ell^2}{12}}$$

$$I_s = I_{s'} + m\,|G-O|^2$$

$I_{s'}$ è un momento di inerzia fatto a lezione ($mb^2/12$)

$$I_{s'} = \frac{m\ell^2}{48}$$

$|G-O| = \frac{3}{4}\ell$, allora $\underline{I_s = \frac{7}{12}m\ell^2}$

Infine $\underline{I_{Oz}} = I_r + I_s = \underline{\frac{2}{3}m\ell^2}$

ES. 2

$$X_P = (R\cos\theta,\ R\,\mathrm{sen}\,\theta)^T$$

$$X_B = (s, r)^T$$

$$V(\theta, s) = Mgr + mgR\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}k\left[(s - R\cos\theta)^2 + (R\,\mathrm{sen}\,\theta - r)^2\right]$$

trascurando i termini costanti si ha

$$V(\theta, s) = mgR\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}ks^2 - kRs\cos\theta - krR\,\mathrm{sen}\,\theta$$

uso $mg = 2kr$

$$V(\theta, s) = \frac{1}{2}ks^2 + krR\,\mathrm{sen}\,\theta - kRs\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = kR(r\cos\theta + s\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial s} = k(s - R\cos\theta) = 0 \end{cases}$$

$$s = R\cos\theta \quad \longrightarrow \quad kR\cos\theta\,(r + R\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\underline{\theta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad s_1 = 0}\ , \qquad \underline{\theta_2 = \frac{3\pi}{2} \qquad s_2 = 0}\ ,$$

$$\underline{\theta_3 = \mathrm{arcsen}\left(-\frac{r}{R}\right) \qquad s_3 = \sqrt{R^2 - r^2}}\ , \qquad \underline{\theta_4 = \pi - \theta_3 \qquad s_4 = -\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = kR(s\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial s} = kR\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$V''(\theta_1, s_1) = \begin{pmatrix} -kRr & kR \\ kR & k \end{pmatrix} \qquad \det V''(\theta_1, s_1) < 0 \qquad \underline{\text{instabile}}$$

$$V''(\theta_2, s_2) = \begin{pmatrix} kRr & -kR \\ -kR & k \end{pmatrix}$$

$\det V''(\theta_2, s_2) = k^2 R (r - R) < 0$

in quanto $r < R$ per ipotesi

<u>instabile</u>

$$V''(\theta_3, s_3) = V''(\theta_4, s_4) = \begin{pmatrix} kR^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \cancel{kr^2} & -kr \\ -kr & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kR^2 & -kr \\ -kr & k \end{pmatrix}$$

$\det V''(\theta_3, s_3) = k^2 (R^2 - r^2) > 0$

$\operatorname{tr} V''(\theta_3, s_3) = k + kR^2 > 0$

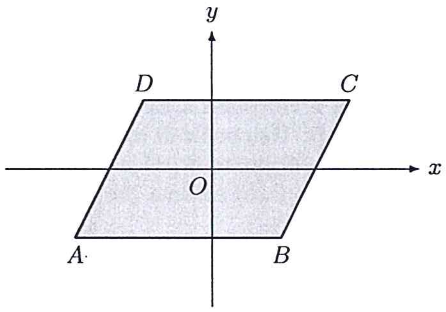
<u>stabili</u>

Compito di Meccanica Razionale
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
6 Giugno 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri una lamina che ha la forma di un parallelogramma. La lamina è omogenea e di massa m. Le coordinate dei vertici A, B, C, D sono date da

$$A \equiv \left(-\ell, -\frac{\ell}{2}\right), \quad B \equiv \left(\frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2}\right), \quad C \equiv \left(\ell, \frac{\ell}{2}\right), \quad D \equiv \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right).$$



i) Determinare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Ox, Oy, Oz.

ii) Mostrare che il sistema di riferimento $Oxyz$ non è principale di inerzia.

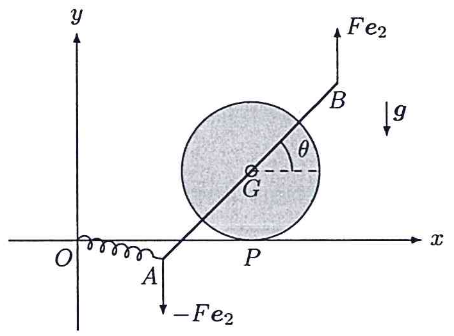
Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Nel piano Oxy si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare sull'asse Ox e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ. L'asta è vincolata nel suo baricentro G tramite una coppia rotoidale al baricentro del disco. Agli estremi A, B dell'asta sono applicate le forze $-F\mathbf{e}_2$, $F\mathbf{e}_2$ ($F > 0$), rispettivamente, con $\mathbf{e}_2$ versore associato ad Oy. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il punto A con l'origine O. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto P del disco con l'asse Ox e l'angolo θ formato dall'asta con l'asse orizzontale (si veda la figura),

i) scrivere le equazioni (pure) del moto del sistema;

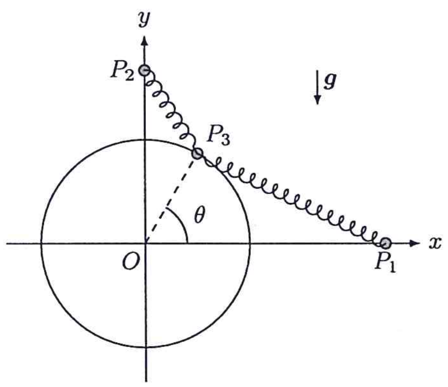
ii) determinare la reazione vincolare in P in funzione delle coordinate lagrangiane.



Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Nel piano Oxy si consideri un sistema meccanico formato da tre punti materiali P_1, P_2, P_3, ciascuno avente massa uguale ad m. I punti P_1, P_2 possono scorrere lungo gli assi Ox, Oy, rispettivamente, mentre il punto P_3 è vincolato a scorrere lungo una guida circolare fissa con centro in O e raggio R. Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano le coppie di punti P_1, P_3 e P_2, P_3. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito e che valga la relazione

$$mg = kR.$$



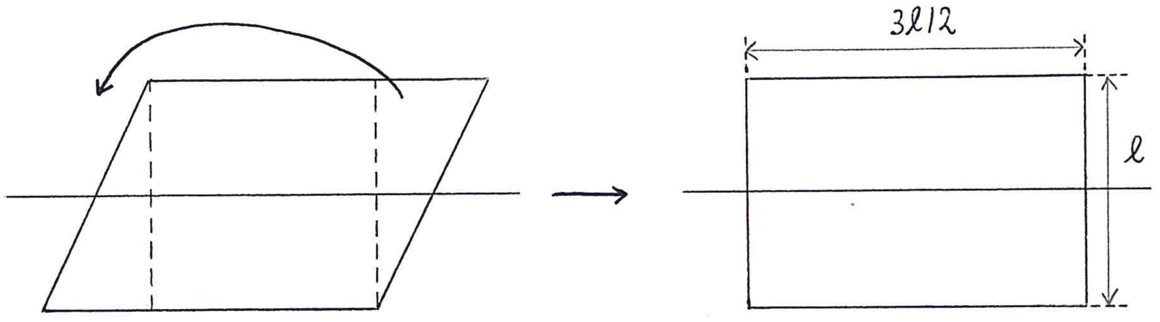
Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P_1, l'ordinata y di P_2 e l'angolo θ tra il segmento OP_3 e l'asse Ox,

i) trovare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;

ii) scrivere l'equazione secolare per calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile.

ES. 1

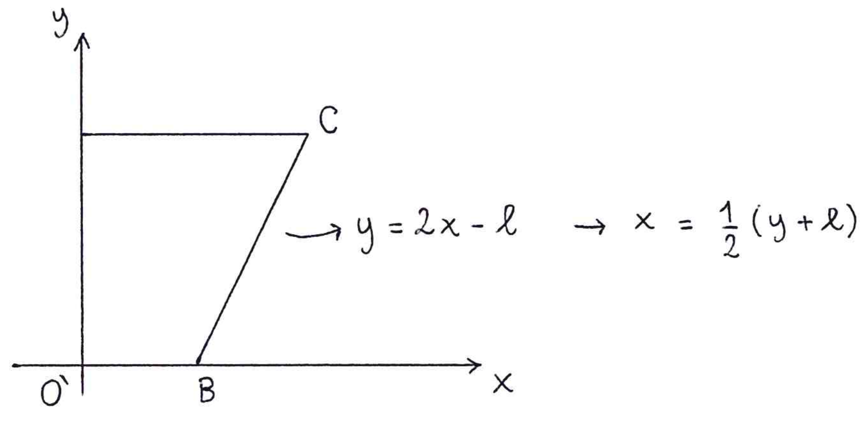
i) Momento d'inerzia rispetto all'asse Ox.



$$I_{Ox} = \sigma \int_{-l/2}^{l/2} \int_{0}^{3l/2} y^2 \, dx \, dy = \frac{3l\sigma}{2} \frac{1}{\cancel{3}} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \underline{\frac{m l^2}{12}} \quad , \quad \sigma = \frac{2m}{3l^2}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse Oy.

Calcolo il momento d'inerzia del corpo che corrisponde a metà parallelogramma



$$\tilde{I}_{Oy} = \sigma \int_{0}^{l} \int_{0}^{\frac{1}{2}(y+l)} x^2 \, dx \, dy = \frac{\sigma}{3} \int_0^l \frac{1}{8} \left(y^3 + l^3 + 3y^2 l + 3y l^2 \right) dy =$$

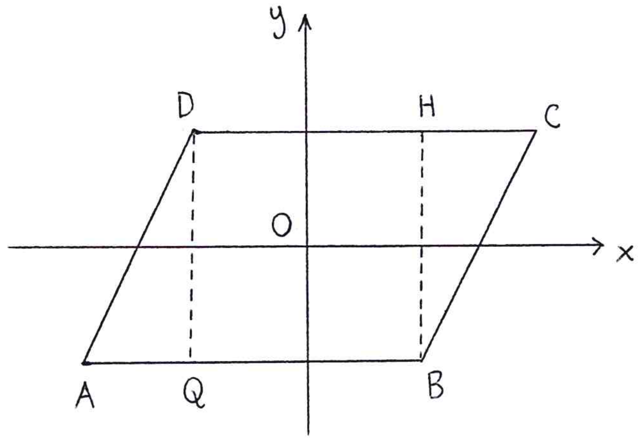
$$\frac{\sigma}{24} \left(\frac{1}{4} l^4 + l^4 + l^4 + \frac{3}{2} l^4 \right) = \frac{\sigma}{24} \frac{15}{4} l^4 = \frac{5}{48} m l^2$$

$$I_{Oy} = 2 \tilde{I}_{Oy} = \underline{\frac{5}{24} m l^2}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse Oz

$$I_{Oz} = I_{Ox} + I_{Oy} = \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{24}\right) m\ell^2 = \underline{\frac{7}{24} m\ell^2}$$

ii)



Ci sono diversi modi per rispondere a questa domanda.

Notiamo che

$$I_{xy}^{QBHD} = 0 ;$$

inoltre applicando ai punti del triangolo BHC la mappa $(x, y) \to (-x, -y)$ otteniamo i punti del triangolo AQD, segue che

$$I_{xy}^{BHC} = I_{xy}^{AQD} \neq 0 .$$

e questi due momenti sono evidentemente diversi da zero.

ES. 2

i) Equazioni pure del sistema + ii) Reazione in P

2ª equazione cardinale dell'asta rispetto a G

$$\vec{x}_G = s\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2 \quad , \quad \vec{x}_A = (s - \ell\cos\theta)\,\hat{e}_1 + (R - \ell\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{e}_2$$

$$\vec{M}_G^{(a)} = \frac{m(2\ell)^2}{12}\dot{\theta}\,\hat{e}_3 = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\,\hat{e}_3 \quad , \quad \dot{\vec{M}}_G^{(a)} = \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}\,\hat{e}_3$$

$$\vec{F}_{el} = -k\,\vec{x}_A = -k\left[(s - \ell\cos\theta)\,\hat{e}_1 + (R - \ell\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{e}_2\right]$$

$$(\vec{x}_A - \vec{x}_G) \times \vec{F}_{el} = k\ell\,(R\cos\theta - s\,\text{sen}\,\theta)\,\hat{e}_3$$

$$\vec{N}_G^{(a)} = \ell\left[(2F + kR)\cos\theta - ks\,\text{sen}\,\theta\right]\hat{e}_3$$

$$\underline{\frac{m\ell}{3}\ddot{\theta} = (2F + kR)\cos\theta - ks\,\text{sen}\,\theta}$$ (1ª equazione pura del moto)

2ª equazione cardinale del disco rispetto a G

$$\vec{M}_G^{(d)} = \frac{MR^2}{2}\left(-\frac{\dot{s}}{R}\right)\hat{e}_3 = -\frac{MR}{2}\dot{s}\,\hat{e}_3 \quad , \quad \dot{\vec{M}}_G^{(d)} = -\frac{MR}{2}\ddot{s}\,\hat{e}_3$$

$$\vec{N}_G^{(d)} = \Phi_{P,x}\,R\,\hat{e}_3$$

$$\underline{\Phi_{P,x} = -\frac{M}{2}\ddot{s}}$$

1ª equazione cardinale dell'intero sistema

$$(m + M)\ddot{s}\,\hat{e}_1 = -(m + M)g\,\hat{e}_2 + \Phi_{P,x}\,\hat{e}_1 + \Phi_{P,y}\,\hat{e}_2 + \vec{F}_{el}$$

$$\begin{array}{l} \hat{e}_1: \\ \hat{e}_2: \end{array} \begin{cases} (m + M)\ddot{s} = \Phi_{P,x} - k(s - \ell\cos\theta) \\ 0 = -(m + M)g + \Phi_{P,y} - k(R - \ell\,\text{sen}\,\theta) \end{cases}$$

dalla seconda si ha

$$\underline{\Phi_{P,y} = (m+M)\,g + k\,(R - \ell \operatorname{sen}\theta)}$$

e sostituendolo nella prima l'espressione di $\Phi_{P,x}$ si ha la 2ª equazione pura del moto

$$\underline{\left(m + \frac{3}{2}M\right)\ddot{s} = k\,(\ell\cos\theta - s)}$$

ES. 3

i) Configurazioni di equilibrio e loro stabilità

$X_1 = (x, 0)^T \qquad X_2 = (0, y)^T \qquad X_3 = R\,(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^T$

$$V(x,y,\theta) = mgy + mgR\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}k\left[R^2\cos^2\theta + (R\operatorname{sen}\theta - y)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}k\left[(R\cos\theta - x)^2 + R^2\operatorname{sen}^2\theta\right]$$

$$= mgy + mgR\operatorname{sen}\theta + \frac{k}{2}(R^2 + y^2 - 2Ry\operatorname{sen}\theta) +$$

$$\frac{k}{2}(R^2 + x^2 - 2Rx\cos\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(x - R\cos\theta) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \overset{=kR}{\widetilde{mg}} + k(y - R\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \overset{=kR}{\widetilde{mg}}R\cos\theta - kRy\cos\theta + kRx\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$x = R\cos\theta \qquad y = R(\operatorname{sen}\theta - 1)$$

$$kR^2\cos\theta - kR^2(\cancel{\operatorname{sen}\theta} - 1)\cos\theta + kR^2\cancel{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$2kR^2\cos\theta = 0$$

$$\begin{cases} \underline{\theta^{(1)} = \frac{\pi}{2}, \quad x^{(1)} = 0, \quad y^{(1)} = 0} \\ \underline{\theta^{(2)} = \frac{3\pi}{2}, \quad x^{(2)} = 0, \quad y^{(2)} = -2R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} = kR\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y} = -kR\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} = kR\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \theta} = -kR\cos\theta \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -kR^2\operatorname{sen}\theta + kRy\operatorname{sen}\theta$$

$$+ kRx\cos\theta$$

$$V''\left(0,0,\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 & kR \\ 0 & k & 0 \\ kR & 0 & -kR^2 \end{pmatrix}, \qquad \det V''\left(\tfrac{\pi}{2},0,0\right) = k(-k^2R^2) + kR(-k^2R) = -2k^3R^2 < 0$$

la c. di e. è instabile

$$V''\left(0,-2R,\tfrac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 & -kR \\ 0 & k & 0 \\ -kR & 0 & 3kR^2 \end{pmatrix}, \qquad \det V''\left(\tfrac{3\pi}{2},0,-2R\right) = k(3k^2R^2) - kR(k^2R) = 2k^3R^2 > 0$$

la c. di e. è stabile

ii) Equazione secolare

$$\det\left(V''\left(0,-2R,\tfrac{3\pi}{2}\right) - \lambda A\right) = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} k-\lambda m & 0 & -kR \\ 0 & k-\lambda m & 0 \\ -kR & 0 & 3kR^2 - \lambda m R^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(k-\lambda m)\left[(k-\lambda m)(3kR^2 - \lambda m R^2) - k^2R^2\right] = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}$$

$$\lambda^2 m^2 - 4mk\lambda + 2k^2 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \frac{k}{m}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$$

Compito di Meccanica Razionale

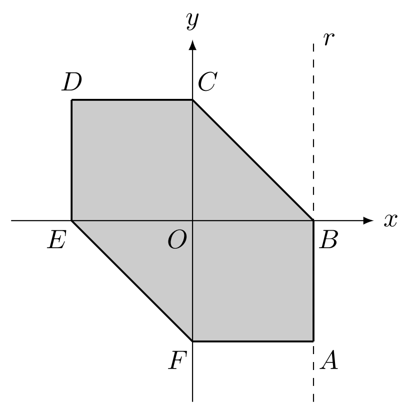
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

27 Giugno 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri una lamina poligonale omogenea di massa m. Le coordinate dei vertici A, B, C, D, E, F sono date da

$$
\begin{array}{lll}
A \equiv (\ell, -\ell)\,, & B \equiv (\ell, 0)\,, & C \equiv (0, \ell)\,, \\
D \equiv (-\ell, \ell)\,, & E \equiv (-\ell, 0)\,, & F \equiv (0, -\ell)\,.
\end{array}
$$



i) Calcolare la matrice di inerzia I_O rispetto ad $Oxyz$.

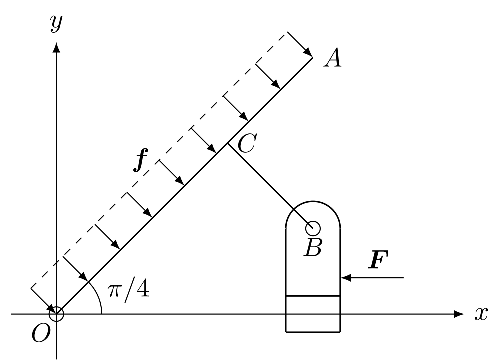
ii) Determinare una terna di assi principali di inerzia per la lamina con polo in O, motivando la risposta.

iii) Calcolare il momento di inerzia della lamina rispetto alla retta r passante per i punti A, B.

Secondo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da una squadra e da un corpo rigido $\mathcal{C}$ vincolati tra loro attraverso una coppia rotoidale mobile posta nel punto B. La squadra è costituita dalle aste OA, CB di lunghezza $3\ell/2$, $\ell/2$, rispettivamente, saldate in corrispondenza di C in modo che $\overline{OC} = \ell$ e che le direzioni delle due aste siano tra loro perpendicolari. L'asta OA è inclinata di $\pi/4$ rispetto all'asse Ox ed il suo estremo O è vincolato all'origine da una coppia rotoidale fissa. Il corpo $\mathcal{C}$ è vincolato all'asse Ox da una coppia prismatica. L'asta OA è sollecitata da un carico per unità di lunghezza distribuito uniformemente e dato da

$$\boldsymbol{f} = f\boldsymbol{u},$$



con $f > 0$, $\boldsymbol{u}$ versore diretto perpendicolarmente all'asta (si veda la figura). Su $\mathcal{C}$ agisce la forza $\boldsymbol{F}$ la cui retta di applicazione è data da $y = h$, $h > 0$. Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito.
Determinare le reazioni vincolari esterne ed interne al sistema in funzione dei parametri f, F, ℓ, h.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri un sistema meccanico formato da un punto materiale P, di massa m che può scorrere su un'ellisse centrata nell'origine, di equazione parametrica

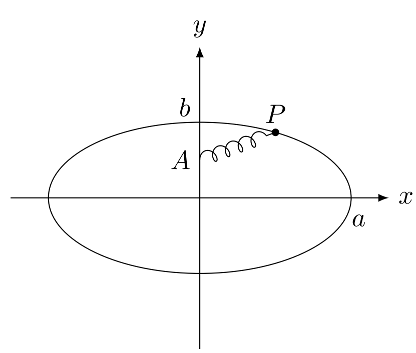
$$x(u) = a\cos u, \qquad y = b\sin u, \qquad u \in [0, 2\pi),$$

con $a > b > 0$. Il punto P è collegato tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla al punto fisso A di coordinate $(x, y) = (0, r)$, con $r > 0$.

Usando come parametro lagrangiano u,

i) trovare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri a, b, r;

ii) per $a = 4r$, $b = 2r$ mostrare che $u = 3\pi/2$ è un equilibrio stabile e calcolare la frequenza propria di oscillazione.



ESERCIZIO 1

i) Momento di inerzia del quadrato EOCD rispetto all'asse Ox

$$I_{Ox}^{EOCD} = \int_{-\ell}^{0}\int_{0}^{\ell} \sigma y^2 \, dx\, dy = \sigma \ell \frac{\ell^3}{3} = \frac{\sigma \ell^4}{3}$$

Momento di inerzia del triangolo COB rispetto all'asse Ox

$$I_{Ox}^{COB} = \int_{0}^{\ell}\int_{0}^{-x+\ell} \sigma y^2 \, dx\, dy = \int_{0}^{\ell} \frac{\sigma}{3} y^3 \Big|_{0}^{-x+\ell} dx =$$

$$\frac{\sigma}{3}\int_{0}^{\ell} (-x^3 + \ell^3 + 3x^2\ell - 3x\ell^2)\, dx =$$

$$\frac{\sigma}{3}\left(-\frac{1}{4}\ell^4 + \ell^4 + \ell^4 - \frac{3}{2}\ell^4\right) = \frac{\sigma \ell^4}{12}$$

Il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse Ox è dato da

$$I_{Ox} = 2\left(I_{Ox}^{EOCD} + I_{Ox}^{COB}\right) = \sigma \ell^4 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}\sigma \ell^4$$

notiamo che $\sigma = \dfrac{m}{3\ell^2}$, allora

$$\underline{I_{Ox} = \frac{5}{18} m \ell^2}$$

Si ha inoltre $\underline{I_{Oy} = I_{Ox} = \frac{5}{18} m \ell^2}$ e $\underline{I_{Oz} = \frac{5}{9} m \ell^2}$

Momento di inerzia centrifugo del quadrato EOCD rispetto agli assi Ox, Oy

$$I_{xy}^{EOCD} = -\int_{-\ell}^{0}\int_{0}^{\ell} \sigma x y \, dx\, dy = -\sigma \int_{-\ell}^{0} x \frac{1}{2}\ell^2 \, dx =$$

$$-\frac{\sigma \ell^2}{2} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\ell}^{0} = \frac{\sigma \ell^4}{4}$$

Momento di inerzia centrifugo del triangolo COB rispetto agli assi Ox, Oy

$$I_{xy}^{COB} = -\int_{0}^{\ell}\int_{0}^{-x+\ell} \sigma x y \, dx\, dy = -\int_{0}^{\ell} \sigma x \frac{1}{2} y^2 \Big|_{0}^{-x+\ell} dx =$$

$$-\frac{\sigma}{2}\int_{0}^{\ell} x(x^2+\ell^2-2x\ell)\, dx = -\frac{\sigma}{2}\int_{0}(x^3+x\ell^2-2x^2\ell)\, dx =$$

$$-\frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{4}\ell^4+\frac{1}{2}\ell^4-\frac{2}{3}\ell^4\right) = -\frac{\sigma\ell^4}{24}$$

Momento di inerzia centrifugo della lamina rispetto agli assi Ox, Oy

$$\underline{I_{xy}} = 2\left(I_{xy}^{EOCD} + I_{xy}^{COB}\right) = \sigma\ell^4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right) = \frac{5}{12}\sigma\ell^4 = \underline{\frac{5}{36} m\ell^2}$$

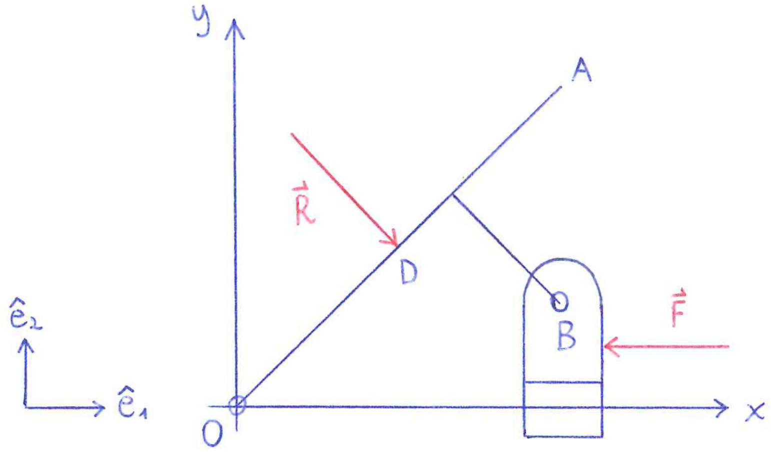
$$\underline{I_O = \frac{m\ell^2}{9}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

ii) Il piano perpendicolare al piano Oxy e passante per i punti medi dei segmenti EF e CB è un piano di simmetria per riflessione. Segue che la bisettrice del 2° e 4° quadrante è un asse principale di inerzia. L'asse Oz è principale di inerzia in quanto il piano Oxy è un piano di simmetria per riflessione. Necessariamente allora anche la bisettrice del 1° e 3° quadrante è un asse principale di inerzia.

iii) $I_r = I_{Oy} + m\ell^2 = \frac{23}{18} m\ell^2.$

ESERCIZIO 2

Sostituiamo il carico distribuito con la risultante applicata nel punto medio dell'asta.



$$\vec{R} = \frac{3}{2} f \ell \, \hat{u} \qquad \overline{DO} = \frac{3\ell}{4}$$

Sia $\vec{\Phi} = \Phi \, \hat{e}_2$ la reazione della coppia prismatica che potrebbe essere anche nulla.

1ª equazione cardinale per l'intero sistema

$$\begin{cases} \Phi_{0,x} - F + \frac{3}{2} f\ell \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \Phi_{0,y} - \frac{3}{2} f\ell \frac{\sqrt{2}}{2} + \Phi = 0 \end{cases}$$

1ª equazione cardinale per la squadra

$$\begin{cases} \Phi_{0,x} + \frac{3\sqrt{2}}{4} f\ell + \Phi_x^{\mathcal{C}-1} = 0 \\ \Phi_{0,y} - \frac{3\sqrt{2}}{4} f\ell + \Phi_y^{\mathcal{C}-1} = 0 \end{cases}$$

2ª equazione cardinale per la squadra rispetto a B

$$\frac{3}{8} f\ell^2 - \Phi_{0,y} \frac{3\sqrt{2}}{4}\ell + \Phi_{0,x} \frac{\sqrt{2}\ell}{4} = 0$$

Abbiamo scritto 5 equazioni in 5 incognite. La soluzione è

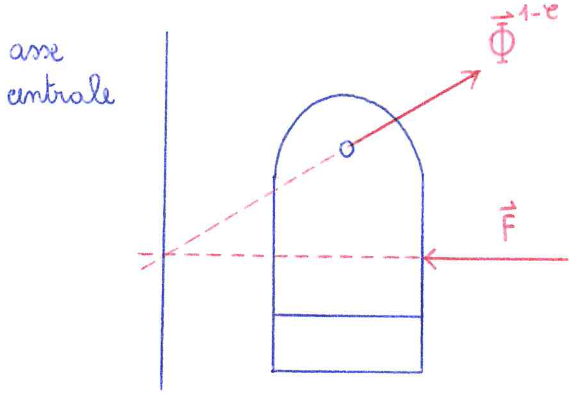
$$\begin{cases} \Phi_{0,x} = F - \frac{3\sqrt{2}}{4} f\ell \\ \Phi_{0,y} = \frac{F}{3} \\ \Phi = \frac{3\sqrt{2}}{4} f\ell - \frac{F}{3} = \Phi_y^{\mathcal{C}-1} \\ \Phi_x^{\mathcal{C}-1} = -F \end{cases}$$

Rimane da determinare l'asse centrale del sistema di forze esercitato attraverso la coppia prismatica.

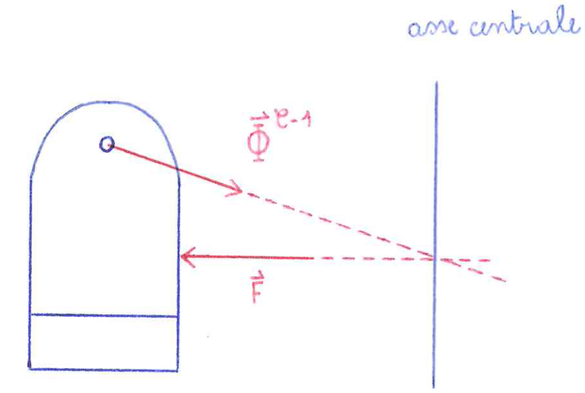
Consideriamo $\mathcal{C}$ e introduciamo $\vec{\Phi}^{1-\mathcal{C}} = (\Phi_x^{1-\mathcal{C}}, \Phi_y^{1-\mathcal{C}}) = \left(F, \frac{F}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4} f\ell\right)$.

Si può presentare una di queste tre situazioni (assumo $h < y_B$)

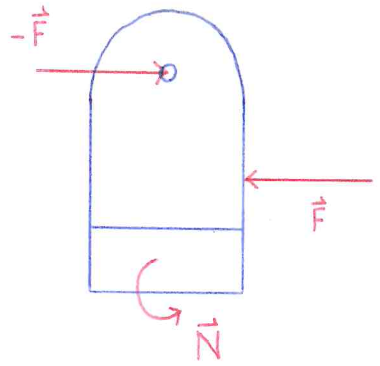
$\Phi_y^{1-e} > 0$



$\Phi_y^{1-e} < 0$



$\Phi_y^{1-e} = 0$



con $\vec{N} = F\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{4} - h\right)\hat{e}_3$

ESERCIZIO 3

i) $V(u) = \frac{1}{2}k\left[a^2\cos^2 u + (b \,\text{sen}\, u - r)^2\right] = \frac{1}{2}k\,(a^2\cos^2 u + b^2 \text{sen}^2 u +$

$r^2 - 2rb\,\text{sen}\, u)$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = k\cos u\left[\text{sen}\, u\,(b^2 - a^2) - rb\right]$$

$\cos u = 0 \qquad \underline{u_1 = \frac{\pi}{2}} \qquad \underline{u_2 = \frac{3\pi}{2}}$

$$\text{sen}\, u = \frac{rb}{b^2 - a^2}$$

se $\quad r < \dfrac{a^2 - b^2}{b}$ allora esistono altre due configurazioni di equilibrio

$$u_3 = \arcsin\left(\frac{rb}{b^2 - a^2}\right) \qquad u_4 = \pi - u_3$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = k(b^2 - a^2)\cos 2u + krb \operatorname{sen} u$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}(u_1) = k(a^2 - b^2) + krb > 0 \qquad \underline{u_1 \text{ è stabile}}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}(u_2) = k(a^2 - b^2) - krb$$

u_2 è stabile se $r < \dfrac{a^2 - b^2}{b}$

u_2 è instabile se $r > \dfrac{a^2 - b^2}{b}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}(u_3) = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}(u_4) = k(b^2 - a^2) - \frac{kr^2b^2}{b^2 - a^2}$$

quando esistono u_3, u_4 sono instabili

ii) Se $a = 4r$ e $b = 2r$ allora $r < \dfrac{a^2 - b^2}{b}$ è u_2 è un equilibrio

stabile.

Energia cinetica : $T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 (a^2 \operatorname{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)$.

Matrice cinetica $A = m(a^2 \operatorname{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}(u_2) = 10kr^2, \qquad A(u_2) = 16 m r^2$$

Poniamo $10kr^2 - \lambda 16 m r^2 = 0$; si ha $\lambda = \dfrac{5k}{8m}$ e

$$\omega = \sqrt{\frac{5k}{8m}}$$

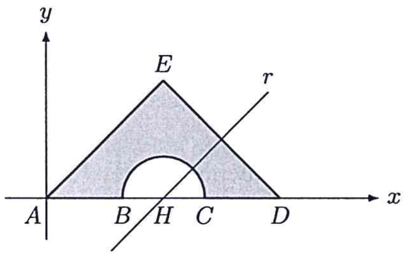
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

18 Luglio 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri la lamina omogenea $ABCDE$ di massa m definita come segue: dal triangolo rettangolo ADE, con $\overline{AE} = \overline{DE} = 2\ell$, viene rimossa la regione corrispondente ad un semicerchio di raggio $\ell/2$ con centro nel punto medio H del segmento AD (si veda la figura).



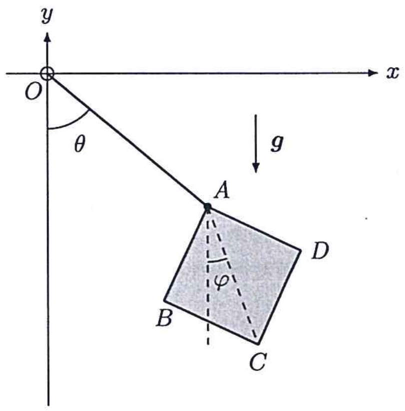
i) Calcolare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Ax, Ay in funzione di m, ℓ.

ii) Introdotto l'asse r passante per H ed il punto medio del segmento ED, dire se l'asse r è principale di inerzia e calcolare il momento di inerzia corrispondente.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da un'asta OA omogenea di massa m lunga 2ℓ e da una lamina quadrata $ABCD$ omogenea di massa M e di lato ℓ. L'estremo O dell'asta è vincolato all'origine degli assi da una coppia rotoidale fissa. Il vertice A della lamina è vincolato all'estremo A dell'asta tramite una coppia rotoidale mobile.

Usando come parametri lagrangiani gli angoli θ e φ formati rispettivamente dall'asta e dal segmento AC con l'asse verticale (si veda la figura), scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.



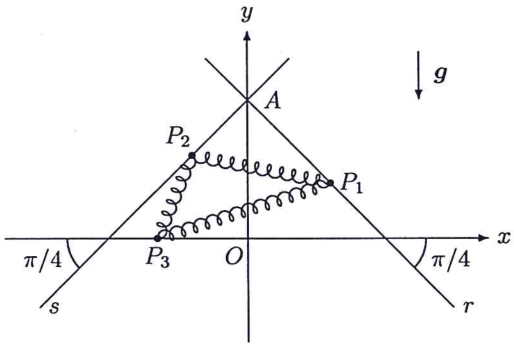
Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri il sistema meccanico formato da tre punti materiali P_1, P_2, P_3 aventi la stessa massa m. I punti P_1, P_2 possono scivolare lungo le guide rettilinee r, s, rispettivamente, inclinate di $\pi/4$ rispetto all'asse Ox e passanti per il punto $A \equiv (0, \ell)$ (si veda la figura). Il punto P_3 può scivolare lungo l'asse Ox. Ciascun punto è collegato agli altri due da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.

Usando come parametri lagrangiani le coordinate x_1, x_2, x_3 di P_1, P_2, P_3 relative all'asse Ox,

i) mostrare che esiste un'unica configurazione di equilibrio e che essa è stabile;

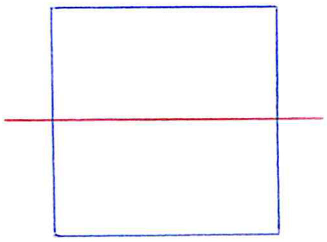
ii) calcolare le frequenze proprie ed i modi normali di oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio stabile trovata.



ESERCIZIO 1

i) Considero la lamina di densità σ definita dal triangolo ADE

$I_{Ax}^{ADE} = \frac{1}{2} I_q$ con I_q momento di inerzia di una lamina quadrata omogenea di densità σ e lato 2ℓ rispetto ad un qualunque asse passante per il suo baricentro e che giace sul piano della lamina



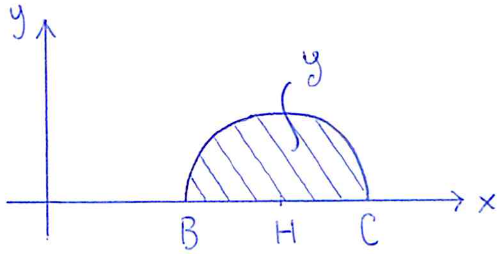
$$\sigma \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} x^2 \, dx \, dy = \sigma (2\ell) \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\ell}^{\ell} = \frac{4}{3} \sigma \ell^4$$

$$I_{Ox}^{ADE} = \frac{2}{3} \sigma \ell^4$$

$$I_{Ay}^{ADE} = I_{Ax}^{ADE} + m^{ADE} (\ell\sqrt{2})^2 \qquad \text{con} \qquad m^{ADE} = \sigma 2\ell^2$$

$$I_{Ay}^{ADE} = \frac{14}{3} \sigma \ell^4$$

Considero la lamina di densità σ definita dal semicerchio con centro in H e raggio $\frac{\ell}{2}$



$$I_{Ax}^{\mathcal{S}} = \frac{\sigma}{2} \int_0^{\ell/2} \int_0^{\pi} \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \frac{\pi \sigma \ell^4}{128}$$

$$I_{Ay}^{\mathcal{S}} = I_{Ax}^{\mathcal{S}} + m^{\mathcal{S}} (\ell\sqrt{2})^2 \qquad \text{con} \qquad m^{\mathcal{S}} = \sigma \frac{\pi \ell^2}{8}$$

$$I_{Ay}^{\gamma} = \frac{\pi\, 33}{128}\,\sigma \ell^4$$

Allora

$$I_{Ax} = I_{Ax}^{ADE} - I_{Ax}^{\gamma} = \underline{\underline{\sigma \ell^4 \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{128} \right)}}$$

$$\text{con } \sigma = \frac{m}{\frac{4\ell^2}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{\ell^2}{4}} = \frac{8m}{\ell^2 (16 - \pi)}$$

$$I_{Ay} = I_{Ay}^{ADE} - I_{Ay}^{\gamma} = \underline{\underline{\sigma \ell^4 \left(\frac{14}{3} - \frac{33\pi}{128} \right)}}$$

ii) Si può mostrare attraverso le simmetrie che gli assi Hx e Hy sono principali di inerzia. Inoltre $I_{Hx} = I_{Hy}$. Segue che l'asse r è principale di inerzia e

$$I_r = I_{Ax}.$$

ESERCIZIO 2

Energia cinetica asta

$$T^{(a)} = \frac{1}{2} I^{(a)}_{Oz} \|\vec{w}^{(a)}\|^2 = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 \qquad \left(I^{(a)}_{Oz} = \frac{4}{3} m l^2 , \ \vec{w}^{(a)} = \dot{\theta}\, \hat{e}_3 \right)$$

Energia cinetica lamina

$$T^{(l)} = \frac{1}{2} M \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} I^{(l)}_{Gz} \|\vec{w}^{(l)}\|^2$$

G è il baricentro della lamina

$$G - O = \left(2l \operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} l \operatorname{sen}\varphi \right) \hat{e}_1 - \left(2l \cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos\varphi \right) \hat{e}_2$$

$$\|\vec{v}_G\|^2 = 4 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\sqrt{2}\, l^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi),$$

$$I^{(l)}_{Gz} = \frac{M l^2}{6}, \qquad \vec{w}^{(l)} = \dot{\varphi}\, \hat{e}_3$$

$$T^{(l)} = M l^2 \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{3} + 2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}\, \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right)$$

Energia potenziale

$$V = -mgl\cos\theta - Mgl\left(2\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi \right)$$

Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + M l^2 \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{3} + 2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}\, \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) \right) +$$
$$mgl\cos\theta + Mgl\left(2\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4 m l^2}{3} \dot{\theta} + 4 M l^2 \dot{\theta} + \sqrt{2} M l^2 \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 4\ell^2\left(\frac{m}{3}+M\right)\ddot\theta + \sqrt{2}\,M\ell^2\,\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi) - \sqrt{2}\,M\ell^2(\dot\theta-\dot\varphi)\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{2M\ell^2}{3}\dot\varphi + \sqrt{2}\,M\ell^2\dot\theta\cos(\theta-\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{2M\ell^2}{3}\ddot\varphi + \sqrt{2}\,M\ell^2\ddot\theta\cos(\theta-\varphi) - \sqrt{2}\,M\ell^2(\dot\theta-\dot\varphi)\dot\theta\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\sqrt{2}\,M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) - (m+2M)g\ell\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \sqrt{2}\,M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2}Mg\ell\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} 4\ell\left(\frac{m}{3}+M\right)\ddot\theta + \sqrt{2}\,M\ell\,\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi) + \sqrt{2}\,M\ell\,\dot\varphi^2\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) = -(m+2M)g\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \\ \frac{2M\ell}{3}\ddot\varphi + \sqrt{2}\,M\ell\,\ddot\theta\cos(\theta-\varphi) - \sqrt{2}\,M\ell\,\dot\theta^2\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

ESERCIZIO 3

i) Equazione della retta r : $y = -x + l$

Equazione della retta s : $y = x + l$

$$V(x_1, x_2, x_3) = mgy_1 + mgy_2 + \frac{1}{2}k\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2}k\left[(x_2 - x_3)^2 + y_2^2\right] + \frac{1}{2}k\left[(x_1 - x_3)^2 + y_1\right]$$

dopo aver sostituito $y_1 = -x_1 + l$, $y_2 = x_2 + l$ si ha

$$V(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(mg + kl) + k\left(2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_3(x_1 + x_2)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= -mg - kl + 4kx_1 - kx_3 = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= mg + kl + 4kx_2 - kx_3 = 0 \end{aligned}\right\} \text{le sommo: } 4k(x_1 + x_2) - 2kx_3 = 0$$

$$x_3 = 2(x_1 + x_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = 2kx_3 - k(x_1 + x_2) = 0$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

allora deve essere $x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$

L'unica configurazione di equilibrio è $\underline{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left(\frac{mg + 2kl}{4k}, -\frac{mg + 2kl}{4k}, 0\right)}$

Si ha

$$V'' = \begin{pmatrix} 4k & 0 & -k \\ 0 & 4k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &4k > 0 \\ &16k^2 > 0 \\ &4k(8k^2 - k^2) - k(4k^2) = 24k^3 > 0 \end{aligned}\right\}$$

Per il criterio di Sylvester V'' è definita positiva.
Per il teorema di Lagrange - Dirichlet $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è stabile.

ii) Matrice cinetica

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + (\dot{x}_3^2) \right] = \frac{m}{2} (2\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\det(V'' - \lambda A) = \det \begin{pmatrix} 4k - 2\lambda m & 0 & -k \\ 0 & 4k - 2\lambda m & -k \\ -k & -k & 2k - \lambda m \end{pmatrix} =$$

$$2(2k - \lambda m)(k - \lambda m)(3k - \lambda m) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{2k}{m}, \quad \lambda_3 = \frac{3k}{m}$$

frequenze proprie $\underline{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, $\underline{\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$, $\underline{\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}}$.

Modi normali

$$\lambda_1: \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k \\ 0 & 2k & -k \\ -k & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{(u_1, v_1, w_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, 2)}$$

$$\lambda_2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & -k \\ -k & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{(u_2, v_2, w_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)}$$

$$\lambda_3: \begin{pmatrix} -2k & 0 & -k \\ 0 & -2k & -k \\ -k & -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{(u_3, v_3, w_3) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, -2)}$$

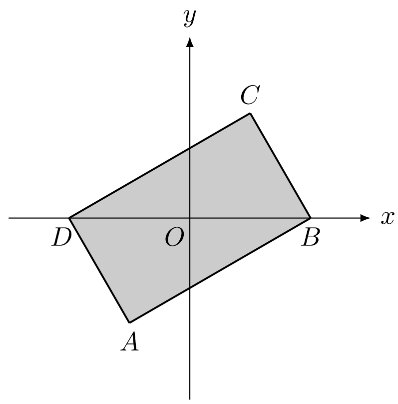
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

12 settembre 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri una lamina rettangolare $ABCD$ omogenea di massa m e lati ℓ, $\sqrt{3}\,\ell$. L'origine O coincide con il baricentro della lamina ed i punti B, D giacciono sull'asse Ox (vedi figura).

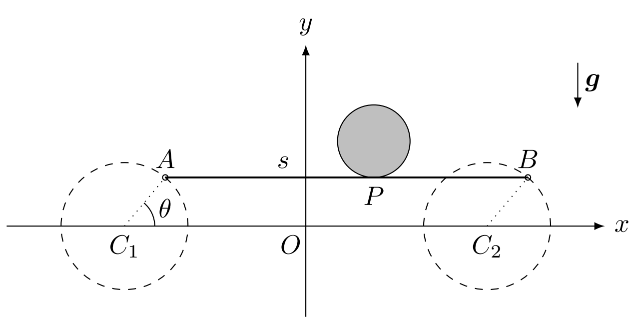


i) Calcolare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Ox, Oy.

ii) Determinare una terna di assi principali di inerzia per la lamina con polo in O, motivando la risposta.

Secondo Esercizio

Nel piano verticale Oxy si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare su un'asta AB omogenea di massa m e lunghezza $2\,\ell$. Gli estremi A, B dell'asta sono vinvolati a scivolare su due guide circolari di raggio r e centro in $C_1 \equiv (-\ell, 0)$, $C_2 \equiv (\ell, 0)$, rispettivamente, in modo che l'asta resti sempre parallela all'asse Ox (vedi figura). Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



Indichiamo con P il punto di contatto tra il disco e l'asta. Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P misurata da A lungo l'asta e l'angolo θ formato dal segmento AC_1 con l'asse Ox,

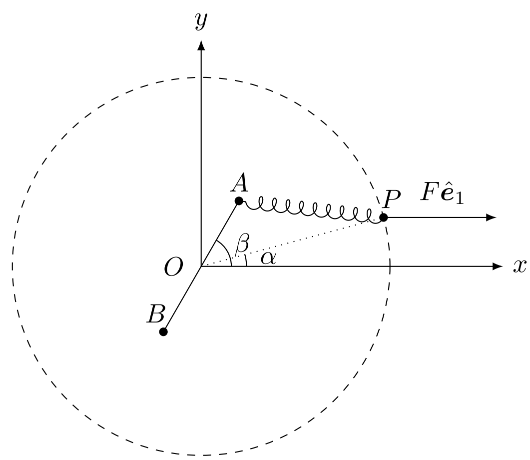
i) scrivere le equazioni (pure) del moto del sistema;

ii) determinare la reazione vincolare che l'asta esercita sul disco in P;

iii) scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto al polo P.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si introduca un sistema di riferimento Oxy. Si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali A, B di uguale massa m vincolati a mantenere la stessa distanza tramite un'asta di massa trascurabile e lunghezza $2r$. Il punto di mezzo dell'asta è incernierato nell'origine O in modo che l'asta possa ruotare senza attrito. Fa parte del sistema anche un punto materiale P di massa M, che può muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R ($R > r$) centrata in O. Sul punto P agisce una forza costante $F\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $F > 0$, dove $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ è il versore dell'asse Ox. Inoltre il punto A è collegato al punto P da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (vedi figura).

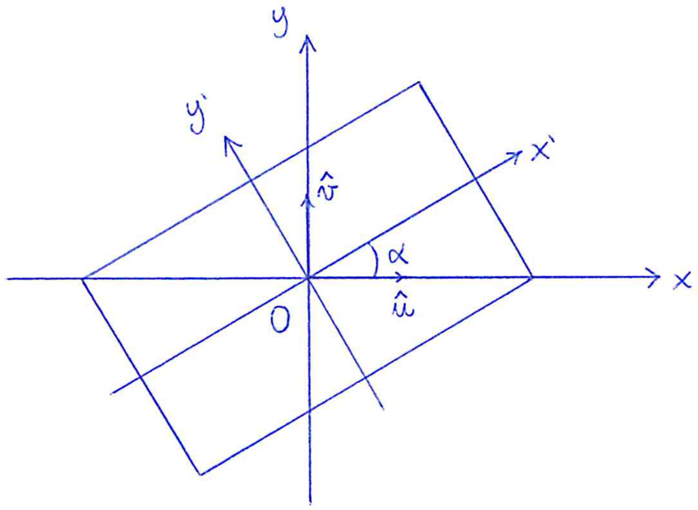


Usando come coordinate lagrangiane gli angoli α e β, che OP e OA formano rispettivamente con l'asse Ox,

i) calcolare le configurazioni di equilibrio e determinarne la stabilità;

ii) calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile.

ESERCIZIO 1



Sia σ la densità della lamina. Si ha $\sigma = \dfrac{m}{\sqrt{3}\ell^2}$

i) Introduciamo l'asse Ox' parallelo ai lati AB, CD e l'asse Oy' parallelo ai lati BC, AD.

$$I_{Ox'} = \int_{-\sqrt{3}\ell/2}^{\sqrt{3}\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sigma (y')^2 dx' dy' = \frac{\sigma\sqrt{3}\ell}{3} \frac{\ell^3}{8} 2 = \frac{m\sqrt{3}\ell}{3\sqrt{3}\ell^2} \frac{\ell^3}{4} = \frac{m\ell^2}{12}$$

$$I_{Oy'} = \int_{-\sqrt{3}\ell/2}^{\sqrt{3}\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sigma (x')^2 dx' dy' = \frac{\sigma\ell}{3}(x')^3\Big|_{-\sqrt{3}\ell/2}^{\sqrt{3}\ell/2} = \frac{\sigma\ell}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\ell^3 2\right) =$$

$$\frac{m\ell}{\sqrt{3}\ell^2}\frac{\sqrt{3}\ell^3}{4} = \frac{m\ell^2}{4}$$

Siano $\hat{u}$ e $\hat{v}$ i versori associati agli assi Ox, Oy, rispettivamente. Notando che $\overline{OB} = \overline{OC} = \ell$ e dalla definizione di Ox' si può dire che $\alpha = \pi/6$. Allora

$$\hat{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T, \qquad \hat{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)^T$$

$$I_{Ox} = \frac{m\ell^2}{12}\hat{u} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \hat{u} = \frac{m\ell^2}{8}$$

$$I_{Oy} = \frac{m\ell^2}{12}\,\hat{v}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\hat{v} = \frac{5}{24}\,m\ell^2.$$

ii) Il piano perpendicolare al piano Oxy e passante per Ox' è un piano di simmetria per riflessione. Segue che Oy' è principale.

Il piano Oxy è di simmetria per riflessione. Segue che Oz (asse passante per O e perpendicolare ad Ox e Oy) è principale.

Dunque anche Ox' è un asse principale di inerzia.

ESERCIZIO 2

i) Siano $G^{(d)}$, $G^{(a)}$ i baricentri del disco e dell'asta.

$$\vec{X}_{G^{(a)}} = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 0)^T \rightarrow \vec{v}_{G^{(a)}} = r\dot{\theta}(-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)^T$$

$$\vec{X}_{G^{(d)}} = (r\cos\theta + s - \ell, r\,\text{sen}\,\theta + R, 0)^T \rightarrow$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = (-r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta + \dot{s}, r\dot{\theta}\cos\theta, 0)^T$$

Energia potenziale

$$V = mgr\,\text{sen}\,\theta + Mg(r\,\text{sen}\,\theta + R)$$

Energia cinetica asta

$$T^{(a)} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

Velocità angolare disco

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{X}_{G^{(d)}} - \vec{X}_P), \quad \vec{X}_{G^{(d)}} - \vec{X}_P = (0, R, 0)^T,$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{G^{(a)}}, \quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega)^T$$

$$-r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta + \dot{s} = -r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta - \omega R \quad \longrightarrow \quad \omega = -\frac{\dot{s}}{R}$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = (-r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta + \dot{s}, r\dot{\theta}\cos\theta, 0)^T$$

Energia cinetica disco

$$T^{(d)} = \frac{1}{2}M(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 - 2r\dot{\theta}\dot{s}\,\text{sen}\,\theta) + \frac{1}{2}\frac{M\cancel{R^2}}{2}\frac{\dot{s}^2}{\cancel{R^2}}$$

$$= \frac{1}{2}M\left(r^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\dot{s}^2 - 2r\dot{\theta}\dot{s}\,\text{sen}\,\theta\right)$$

Funzione lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\left(r^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\dot{s}^2 - 2r\dot{\theta}\dot{s}\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$-mgr\,\mathrm{sen}\,\theta \;-\; Mg\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta + R)$$

Equazioni pure del moto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta + Mr^2\dot\theta - Mr\dot s\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = mr^2\ddot\theta + Mr^2\ddot\theta - Mr\ddot s\,\mathrm{sen}\,\theta - Mr\dot s\dot\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -Mr\dot\theta\dot s\cos\theta - mgr\cos\theta - Mgr\cos\theta$$

$$\underline{r^2(m+M)\ddot\theta - Mr\ddot s\,\mathrm{sen}\,\theta = -gr\cos\theta\,(m+M)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot s} = \frac{3}{2}M\dot s - Mr\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot s}\right) = \frac{3}{2}M\ddot s - Mr\ddot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - Mr\dot\theta^2\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$\underline{\frac{3}{2}\ddot s - r\ddot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot\theta^2\cos\theta = 0}$$

ii) Accelerazione del baricentro del disco

$$\vec a_{G^{(d)}} = (-r\ddot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot\theta^2\cos\theta + \ddot s,\; r\ddot\theta\cos\theta - r\dot\theta^2\,\mathrm{sen}\,\theta,\; 0)^T$$

1° eq. cardinale proiettata lungo Ox e Oy

$$\begin{cases} \Phi_{P,x} = (-r\ddot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot\theta^2\cos\theta + \ddot s)M \\ \Phi_{P,y} = (r\ddot\theta\cos\theta - r\dot\theta^2\,\mathrm{sen}\,\theta)M + Mg \end{cases}$$

iii) $$\dot{\vec M}_P = \vec N_P - M\vec v_P \times \vec v_{G^{(d)}}$$

$$\vec N_P = \vec 0$$

$\vec{v}_P$ è la velocità di P come punto di contatto tra il disco e l'asta, è dunque diversa dalla velocità $\vec{v}_P$ introdotta in precedenza

$$\vec{X}_P = (-\ell + r\cos\theta + s,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)^T \longrightarrow \vec{v}_P = (-r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{s},\ r\dot{\theta}\cos\theta,\ 0)^T$$

$$\vec{v}_P \times \vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_{G^{(d)}} + M\,(\vec{X}_{G^{(d)}} - \vec{X}_P) \times \vec{v}_{G^{(d)}}$$

$$= \left(0,\ 0,\ \frac{MR^2}{2}\left(-\frac{\dot{s}}{R}\right) - MR\,(-r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{s})\right)^T = \left(0,\ 0,\ MR\left(r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3}{2}\dot{s}\right)\right)^T$$

$$\dot{\vec{M}}_P = \left(0,\ 0,\ MR\left(r\dot{\theta}^2\cos\theta + r\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3}{2}\ddot{s}\right)\right)^T$$

2ª equazione cardinale del disco

$$\underline{r\dot{\theta}^2\cos\theta + r\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3}{2}\ddot{s} = 0}$$

Es. 3

Coordinate dei punti materiali

$$A \equiv r\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix} \qquad B \equiv -r\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix} \qquad P \equiv R\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2} k |A-P|^2 - F(P-O)\cdot \hat{e}_1$$

$$= -krR\cos(\alpha-\beta) - FR\cos\alpha$$

Equilibri
$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \alpha} = krR\sin(\alpha-\beta) + FR\sin\alpha = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \beta} = -krR\sin(\alpha-\beta) = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ottiene $\sin\alpha = 0$, cioè $\alpha = 0, \pi$

Sostituendo nella seconda equazione si ottiene $\sin\beta = 0$, cioè $\beta = 0, \pi$

Le configurazioni di equilibrio sono quindi

$$(\alpha,\beta) = (0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$$

Per studiare la loro stabilità calcolo la matrice hessiana di V:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = krR\cos(\alpha-\beta) + FR\cos\alpha$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} = -krR\cos(\alpha-\beta)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} = krR\cos(\alpha-\beta)$$

$$V''(0,0) = R\begin{bmatrix} (kr+F) & -kr \\ -kr & kr \end{bmatrix}$$

$\det V''(0,0) = RFkr > 0$

$\operatorname{tr} V''(0,0) > 0$

$(\alpha,\beta) = (0,0)$ è STABILE per il teor. di Lagrange-Dirichlet

Es. 3

$$V''(0,\pi) = R\begin{bmatrix} (-kr+F) & kr \\ kr & -kr \end{bmatrix}$$

$\det V''(0,\pi) = -RFkr < 0$

$(\alpha,\beta) = (0,\pi)$ è INSTABILE

perché $V''(0,\pi)$ ha un autovalore < 0.

$$V''(\pi,0) = R\begin{bmatrix} -(kr+F) & kr \\ kr & -kr \end{bmatrix}$$

$\det V''(\pi,0) = RFkr > 0$

$\mathrm{Tr}\, V''(\pi,0) < 0$

$(\alpha,\beta) = (\pi,0)$ è INSTABILE

perché $V''(\pi,0)$ ha autovalori < 0.

$$V''(\pi,\pi) = R\begin{bmatrix} (kr-F) & -kr \\ -kr & kr \end{bmatrix}$$

$\det V''(\pi,\pi) = -RFkr < 0$

$(\alpha,\beta) = (\pi,\pi)$ è INSTABILE

perché $V''(\pi,\pi)$ ha un autovalore < 0.

Studio le piccole oscillazioni attorno ad $(\alpha,\beta) = (0,0)$

energia cinetica $\quad T = \frac{1}{2} m\left(|v_A|^2 + |v_B|^2\right) + \frac{1}{2} M |v_P|^2$

$$= m r^2 \dot\beta^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot\alpha^2$$

per cui la matrice cinetica è $\quad A = \begin{bmatrix} MR^2 & 0 \\ 0 & 2mr^2 \end{bmatrix}$

equazione secolare: $\quad \left|V''(0,0) - \lambda A\right| = 0$

$$\left|V''(0,0) - \lambda A\right| = \begin{vmatrix} R(kr+F) - \lambda M R^2 & -kRr \\ -kRr & kRr - \lambda 2mr^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(2mMrR)}_{\xi}\lambda^2 - 2\underbrace{\left(mkr^2 + mrF + \frac{MkR^2}{2}\right)}_{\eta}\lambda + \underbrace{RkF}_{\zeta} = 0$$

ES. 3

$$\xi \lambda^2 - 2\eta\lambda + \zeta = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\cancel{2}\eta \pm \sqrt{\cancel{4}\eta^2 - \cancel{4}\xi\zeta}}{\cancel{2}\xi}$$

frequenze proprie $\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$