Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

8 Gennaio 2020

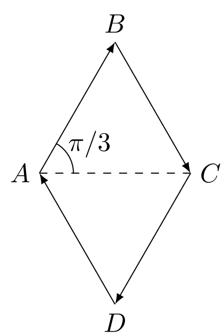
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

a) Si consideri il sistema di vettori applicati

$$\{(B - A, A), (C - B, B), (D - C, C), (A - D, D)\}$$

descritto in figura



in cui tutti i vettori hanno la stessa norma ℓ. L'angolo $\widehat{CAB}$ tra i segmenti AC ed AB è $\pi/3$. Mostrare che tale sistema di vettori è equivalente a una coppia il cui momento ha norma uguale al doppio dell'area del rombo formato congiungendo i punti A, B, C, D.

b) In un piano si fissi un riferimento Oxy e si consideri il sistema di vettori applicati

$$\{(\vec{\boldsymbol{v}}_1, P_1), (\vec{\boldsymbol{v}}_2, P_2), (\vec{\boldsymbol{v}}_3, P_3)\}$$

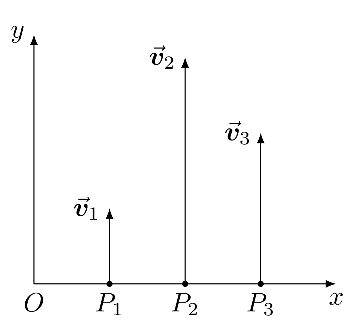
descritto in figura, in cui

$$P_1 \equiv (1, 0), \qquad P_2 \equiv (2, 0), \qquad P_3 \equiv (3, 0)$$

e

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2, \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = 3\hat{\mathbf{e}}_2, \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_3 = 2\hat{\mathbf{e}}_2,$$

in cui $\hat{\mathbf{e}}_2$ è il versore dell'asse Oy.



Trovare il centro di questi vettori paralleli e verificare che esso è un punto dell'asse centrale del sistema.

Secondo Esercizio

Un corpo puntiforme di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$ e

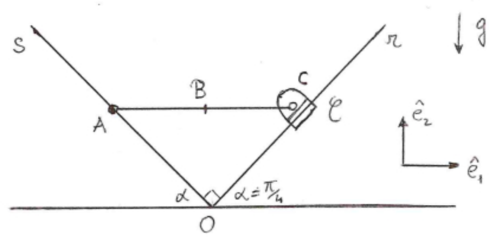
$$f(\rho) = -\frac{dV(\rho)}{d\rho}, \quad V(\rho) = e^{\rho} - \frac{3}{\rho^2}.$$

a) Assumendo che il momento angolare non sia nullo, tracciare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto, con coordinate ρ, $\dot{\rho}$, nei casi qualitativamente diversi che si presentano al variare della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto.

b) Studiare il numero delle traiettorie circolari al variare di c ($\neq 0$).

Terzo Esercizio

In un piano verticale si consideri il sistema meccanico in equilibrio formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ e da un corpo rigido $\mathcal{C}$ di massa M, il cui baricentro C è collegato ad un estremo dell'asta tramite una coppia rotoidale mobile. L'altro estremo dell'asta è collegato, tramite una coppia rotoidale fissa, ad una retta fissa s che forma un angolo $\alpha = \pi/4$ con la direzione orizzontale. L'asta si trova in posizione orizzontale. Inoltre il corpo $\mathcal{C}$ è collegato tramite una coppia prismatica ad un'altra retta fissa r perpendicolare ad s (vedi figura). Assumiamo che sul sistema agisca la forza di gravità, di accelerazione g, e che tutti i vincoli siano privi di attrito.



i) Trovare dei sistemi di forze equivalenti alle reazioni vincolari esercitate dalla retta s e dal corpo $\mathcal{C}$ sull'asta.

ii) Trovare un sistema di forze equivalente alle reazioni vincolari esercitate dalla retta r sul corpo $\mathcal{C}$. Mostrare che esiste l'asse centrale di tali reazioni e determinarlo.

Compito di Meccanica Razionale

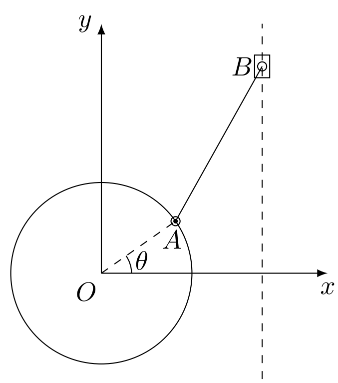
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

28 Gennaio 2020

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in un piano un sistema di riferimento Oxy. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un disco di raggio r e da un'asta di lunghezza ℓ. Il disco può ruotare intorno al suo centro che è fissato nell'origine O del riferimento. L'estremo B dell'asta è vincolato a scorrere sull'asse $x = h$, con $h < \ell$ costante positiva e l'altro estremo A è incernierato in un punto del bordo del disco.



Sia θ l'angolo tra il segmento OA e l'asse Ox. Assumiamo che $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (quando $\theta < 0$ l'ordinata di A è negativa) e che la configurazione del sistema ad un certo istante sia quella mostrata in figura. Usando come variabile θ,

i) trovare la velocità angolare dell'asta;

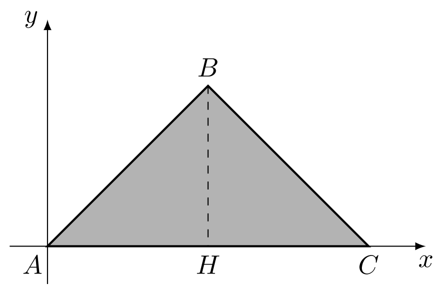
ii) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta e determinare quindi la polare fissa (base).

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Axyz$. Sul piano Axy si consideri una lamina triangolare di vertici A, B, C. I due lati AB e BC sono entrambi lunghi ℓ e l'angolo $\widehat{ABC}$ tra essi compreso è $\frac{\pi}{2}$. Indichiamo con H il punto medio del lato AC (si veda la figura). La lamina è omogenea di densità μ.

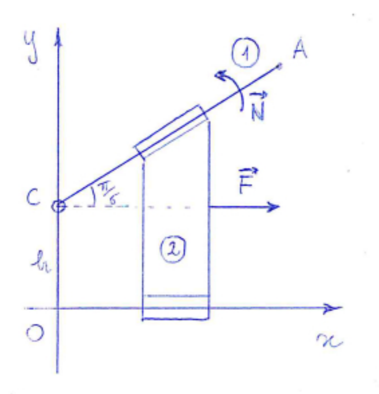
i) Calcolare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi del sistema di riferimento $Axyz$.

ii) Mostrare che qualunque asse sul piano Axy passante per H è principale di inerzia.



Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura, costituito da due corpi rigidi. Il primo corpo è un'asta con un estremo incernierato in un punto $C \equiv (0, h)$, con $h > 0$, dell'asse Oy tramite una coppia rotoidale fissa. L'asta è collegata al secondo corpo tramite una coppia prismatica e un'altra coppia prismatica collega il secondo corpo all'asse Ox (vedi figura).



Siano $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$ i versori degli assi Ox, Oy. Una coppia di momento $\vec{\boldsymbol{N}} = N\hat{\boldsymbol{e}}_3$, con $N > 0$ ed $\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2$, agisce sull'asta. Inoltre, una forza $\vec{\boldsymbol{F}} = F\hat{\boldsymbol{e}}_1$, con $F > 0$, parallela all'asse Ox, agisce sul secondo corpo e la sua retta d'azione ha distanza h dall'asse Ox. Tutti i vincoli sono privi di attrito. Sapendo che l'asta forma un angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$ con l'asse Ox determinare le reazioni vincolari che sono esercitate sui due corpi.

Compito di Meccanica Razionale

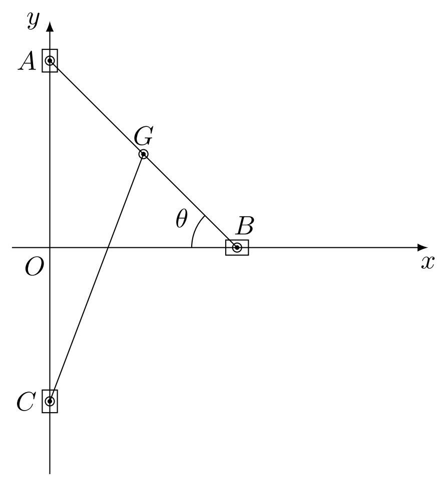
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

18 Febbraio 2020

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in un piano un sistema di riferimento Oxy. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un'asta AB lunga ℓ i cui estremi possono scorrere sugli assi Ox, Oy. Una seconda asta GC lunga anch'essa ℓ ha l'estremo G incernierato nel punto di mezzo del segmento AB e l'estremo C che può scorrere sull'asse Oy.



Sia θ l'angolo tra l'asta AB e l'asse Ox. Usando come variabile θ,

i) trovare la velocità angolare dell'asta GC;

ii) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta GC per $\theta = \frac{\pi}{4}$;

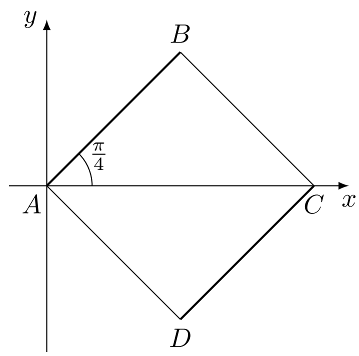
iii) individuare graficamente la posizione del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta GC per una generica configurazione del sistema meccanico usando il teorema di Chasles (motivare la risposta).

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Axyz$. Sul piano Axy si consideri un corpo rigido quadrato di vertici $ABCD$ e massa m costituito da quattro aste omogenee di uguale lunghezza ℓ. Le aste BC, DA hanno densità μ, mentre le aste AB, CD hanno densità 2μ. L'angolo tra l'asse Ax e l'asta AB è $\frac{\pi}{4}$.

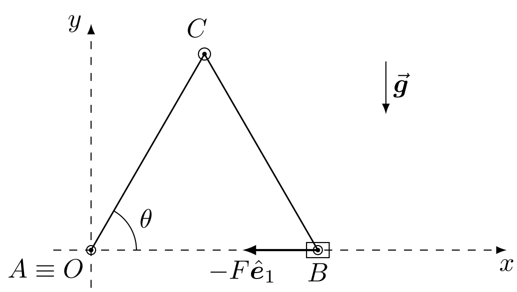
i) Calcolare la matrice di inerzia del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento $Axyz$ in funzione di m ed ℓ.

ii) Calcolare il momento di inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse passante per il suo baricentro ed inclinato di $\frac{\pi}{3}$ rispetto all'asse Ax.



Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee, di uguale massa m e uguale lunghezza 2ℓ, incernierate in un loro estremo C. L'estremo A dell'asta AC è fissato nell'origine O del sistema di riferimento e l'estremo B dell'altra asta può scorrere sull'asse Ox. Su B è applicata una forza $\vec{\mathbf{F}} = -F\hat{\boldsymbol{e}}_1$ ($F > 0$), con $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ versore dell'asse Ox. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usando come coordinata l'angolo θ che l'asta AC forma con l'asse Ox,

i) calcolare il lavoro virtuale delle forze attive ed usarlo per determinare le configurazioni di equilibrio al variare dei parametri m, g, F, ℓ tramite il principio dei lavori virtuali.

Si assuma adesso che

$$mg = 2F$$

e si consideri l'unica configurazione di equilibrio θ_0, con $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

ii) Per $\theta = \theta_0$ calcolare le reazioni vincolari nei punti A, B, C con le equazioni cardinali della Statica.