Compito di Meccanica Razionale

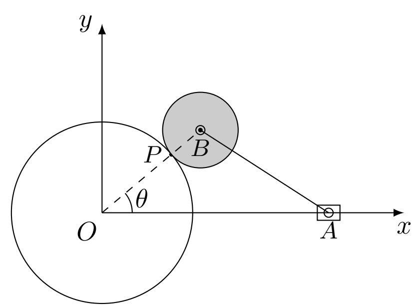
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

8 Gennaio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Un disco di raggio r può muoversi in un piano, in cui è fissato un sistema di riferimento Oxy, rotolando senza strisciare su una guida circolare di raggio R e centro O. Al centro B del disco è incernierato un estremo di un'asta lunga ℓ, con $\ell > R + r$. L'altro estremo A dell'asta può scivolare lungo l'asse Ox. Siano P il punto di contatto tra la guida e il disco e θ l'angolo tra il segmento OP e l'asse Ox (vedi figura).



1. Determinare la velocità angolare del disco e dell'asta in funzione di θ, $\dot{\theta}$.
2. Calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta in funzione di θ.
3. Trovare graficamente la posizione di C_0 motivando il procedimento seguito.

Secondo Esercizio

Si consideri un punto materiale P di massa m libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\rho) = k \arctan \rho,$$

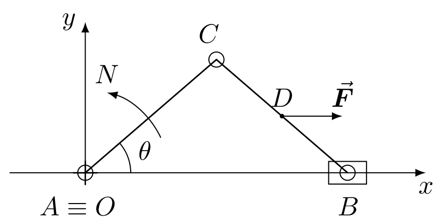
dove $k > 0$ è una costante e ρ è la distanza di P dal centro di forze.

1. Detto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ il vettore delle coordinate del punto P, scrivere esplicitamente l'espressione della forza centrale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.
2. Dimostrare che per ogni valore c della componente del momento angolare ortogonale al piano del moto esiste un'unica traiettoria circolare.[1]
3. Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $\rho, \dot{\rho}$;
4. Trovare il valore h dell'energia totale E tale che le traiettorie sono illimitate se e solo se $E \geq h$.

[1] *suggerimento:* si può usare la regola dei segni di Cartesio: dato un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con coefficienti reali a_j, il numero di radici positive è al massimo uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti $a_n, \ldots, a_0$.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da due aste, di uguale lunghezza 2ℓ, incernierate in un loro estremo C. L'estremo A della prima asta è incernierato nell'origine O. L'estremo B della seconda asta può scivolare sull'asse Ox. Siano $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$ i versori degli assi Ox, Oy. Nel punto medio dell'asta BC agisce una forza costante $\vec{\boldsymbol{F}} = F\hat{\boldsymbol{e}}_1$, con $F > 0$. Sull'asta AC agisce una coppia di forze di momento $\vec{\boldsymbol{N}} = N\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2$, con $N > 0$. Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usando come coordinate l'angolo θ che l'asta AC forma con l'asse Ox,

1. determinare le configurazioni di equilibrio con il principio dei lavori virtuali;

2. ritrovare le configurazioni di equilibrio e calcolare le reazioni vincolari nei punti A, B, C con le equazioni cardinali della statica.

Soluzioni

Primo Esercizio

1. Detti $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$ i versori degli assi Ox, Oy, la velocità angolare del disco è della forma

$$\omega_d \hat{\boldsymbol{e}}_3,$$

con $\omega_d \in \mathbb{R}$ da determinarsi ed $\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2$. Le coordinate dei punti P, B sono

$$\begin{cases} x_P = R\cos\theta \\ y_P = R\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = (R+r)\cos\theta \\ y_B = (R+r)\sin\theta \end{cases} .$$

Dalla formula fondamentale della cinematica rigida si ha

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_B + \omega_d \boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_B),$$

da cui si ricava

$$\omega_d = \frac{R+r}{r}\dot{\theta}.$$

Detto φ l'angolo $\widehat{OAB}$, la velocità angolare dell'asta è della forma

$$\omega_a \hat{\boldsymbol{e}}_3,$$

con $\omega_a = -\dot{\varphi}$. La relazione tra gli angoli φ e θ è data da

$$\ell \sin\varphi = (R+r)\sin\theta,$$

cioè

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{(R+r)}{\ell}\sin\theta\right),$$

per cui

$$\omega_a = -\frac{(R+r)\dot{\theta}\cos\theta}{\sqrt{\ell^2 - (R+r)^2\sin^2\theta}}.$$

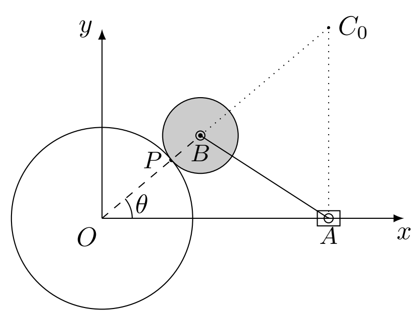
2. Le coordinate (x_0, y_0) del centro istantaneo di rotazione C_0 si possono calcolare dalla relazione

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{v}_{C_0} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x}_{C_0} - \boldsymbol{x}_B).$$

Si ottiene

$$x_0 = (R+r)\cos\theta + \sqrt{\ell^2 - (R+r)^2\sin^2\theta},$$
$$y_0 = (R+r)\sin\theta + \sqrt{\ell^2 - (R+r)^2\sin^2\theta}\,\tan\theta.$$

3. Per il teorema di Chasles, il centro istantaneo di rotazione sta sulla normale alla velocità di ogni punto del corpo da esso distinto. La velocità di A è diretta lungo Ox, quella di B è ortogonale a $B - O$.



Secondo Esercizio

1. La forza centrale si scrive

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho},$$

con

$$f(\rho) = -\mathcal{V}'(\rho) = -\frac{k}{1+\rho^2}.$$

2. L'energia potenziale efficace si scrive

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Consideriamo un valore qualunque di c (con $c \neq 0$ perché sia definito univocamente un piano del moto). Dobbiamo mostrare che questa funzione ha un unico punto stazionario positivo $\bar{\rho}$. Si ha

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = \frac{k}{1+\rho^2} - \frac{c^2}{m\rho^3},$$

per cui, dall'equazione $\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ si trova l'equazione polinomiale

$$p(\rho) = km\rho^3 - c^2\rho^2 - c^2 = 0.$$

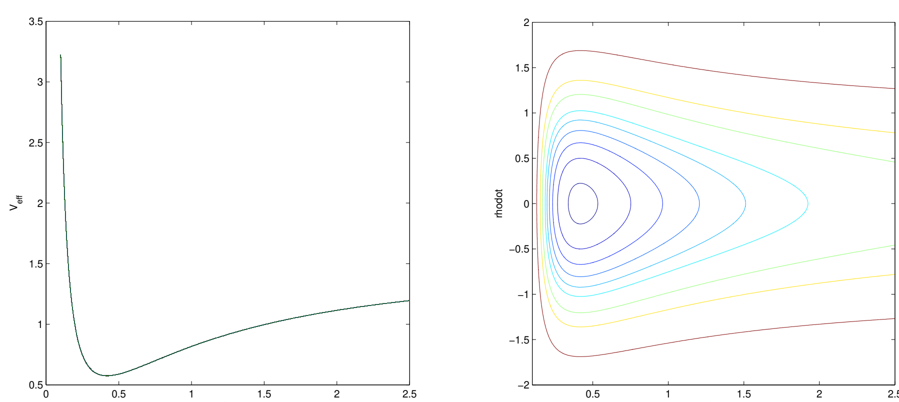
Per la regola dei segni di Cartesio questa equazione ha al massimo una soluzione positiva. Quest'ultima esiste perché

$$p(0) = -c^2, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} p(\rho) = +\infty.$$

3. Tenendo conto dei limiti

$$\lim_{\rho\to 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = k\frac{\pi}{2}$$

e di quanto dimostrato al punto precedente, possiamo tracciare qualitativamente il grafico di $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ (a sinistra) ed il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto (a destra):



4. Dallo studio fatto al punto 3. si vede che il valore cercato dell'energia totale è

$$h = k\frac{\pi}{2}.$$

Terzo Esercizio

1. Il lavoro virtuale delle forze attive agenti sul sistema è dato da

$$\delta\mathcal{L} = N\dot{\theta}dt - 3F\ell\sin\theta\delta\theta = (N - 3F\ell\sin\theta)\delta\theta,$$

in cui si è usato $\dot{\theta}dt = d\theta = \delta\theta$. Per il principio dei lavori virtuali si ha

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

per ogni scelta di $\delta\theta$, per cui gli equilibri corrispondono alle soluzioni di

$$\sin\theta = \frac{N}{3F\ell},$$

cioè

$$\theta_1 = \arcsin\frac{N}{3F\ell}, \qquad \theta_2 = \pi - \theta_1.$$

2. Chiamiamo $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$ i versori degli assi Ox, Oy. Sia $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C = \Phi_C^x\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \Phi_C^y\hat{\boldsymbol{e}}_2$ la reazione vincolare esercitata dall'asta BC sull'asta AC nel punto C. Siano inoltre $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A = \Phi_A^x\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \Phi_A^y\hat{\boldsymbol{e}}_2$ la reazione in A e $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_B = \Phi_B^y\hat{\boldsymbol{e}}_2$ la reazione in B.

Le aste AC e BC devono essere in equilibrio individualmente. Le equazioni cardinali della Statica per l'asta AC si scrivono

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A + \vec{\boldsymbol{\Phi}}_C = \vec{\boldsymbol{0}}, \\ &N\hat{\boldsymbol{e}}_3 + (C - A)\times\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C = \vec{\boldsymbol{0}}, \end{aligned} \tag{1}$$

dove A è il polo scelto per la seconda equazione cardinale.

Le equazioni cardinali della Statica per l'asta BC si scrivono

$$\begin{aligned} &-\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C + F\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \vec{\boldsymbol{\Phi}}_B = \vec{\boldsymbol{0}}, \\ &(D - C)\times F\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (B - C)\times\vec{\boldsymbol{\Phi}}_B = \vec{\boldsymbol{0}}, \end{aligned} \tag{2}$$

dove C è il polo scelto per la seconda equazione cardinale.

Dalla seconda equazione in (2) si trova

$$\Phi_B^y = -\frac{F}{2}\tan\theta$$

e dalla prima

$$\Phi_C^x = F, \qquad \Phi_C^y = \Phi_B^y.$$

Sostituendo queste relazioni nella seconda equazione in (1) si ritrova l'equazione degli equilibri

$$\sin\theta = \frac{N}{3F\ell}.$$

Infine, dalla prima equazione in (1) si ottiene

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A = -\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C.$$

Compito di Meccanica Razionale

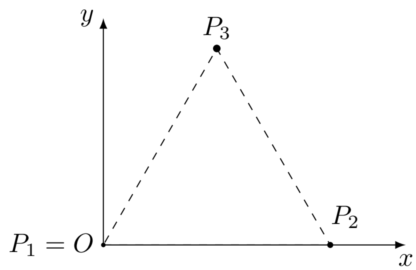
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

29 Gennaio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri un corpo rigido discreto formato da 3 punti materiali P_1, P_2, P_3, di masse $m, 2m, 4m$ rispettivamente, posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato ℓ. Sia $\Sigma = Oxyz$ un riferimento solidale al corpo scelto come nella figura, con P_1, P_2, P_3 giacenti nel piano Oxy.



1. Calcolare le coordinate del baricentro B del corpo.
2. Calcolare la matrice di inerzia I_O, relativa all'origine O, in coordinate nella base $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$ associata al riferimento Σ.
3. Trovare un riferimento principale di inerzia con origine in O.

Secondo Esercizio

Si consideri un punto materiale P di massa m libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\rho) = k \log(1 + \frac{\rho^2}{r^2}),$$

dove $k, r > 0$ sono due costanti e ρ è la distanza di P dal centro di forze.

1) Detto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ il vettore delle coordinate del punto P, scrivere esplicitamente l'espressione della forza centrale $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

Consideriamo condizioni iniziali per cui

$$c = 2r\sqrt{km},$$

dove c è la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

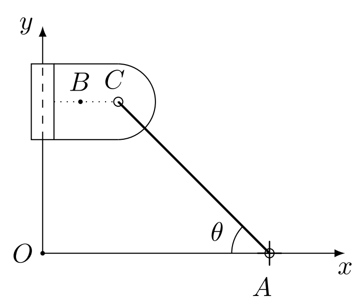
2) Mostrare che esiste un'unica traiettoria circolare e trovarne il valore del raggio in funzione di r.
3) Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate $\rho, \dot{\rho}$.
4) Trovare il valore minimo $h_{\min}$ dell'energia totale.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea AC, di massa m e lunghezza 2ℓ. L'estremo A dell'asta è incernierato nel punto dell'asse Ox di coordinate $(\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell, 0)$. L'altro estremo C è incernierato in un punto di un corpo rigido $\mathcal{D}$ di massa M e baricentro B. Il corpo $\mathcal{D}$ è anche collegato all'asse Oy attraverso una coppia prismatica. Le coordinate dei punti B, C sono

$$B \equiv (\frac{\sqrt{2}}{4}\ell, \sqrt{2}\ell), \qquad C \equiv (\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \sqrt{2}\ell).$$

Sui due corpi agisce la forza di gravità di accelerazione g e tutti i vincoli sono supposti privi di attrito.



1. Calcolare l'angolo θ che l'asta AC forma con la direzione orizzontale.

2. Usando il principio di sovrapposizione degli effetti ed il metodo di scomposizione determinare le componenti delle reazioni vincolari in A e in C esercitate rispettivamente dall'asse Ox e dal corpo $\mathcal{D}$ sugli estremi dell'asta.

Soluzioni

Primo Esercizio

1. Dalla relazione

$$(m + 2m + 4m)(B - O) = m(P_1 - O) + 2m(P_2 - O) + 4m(P_3 - O)$$

scritta in coordinate in Σ si ottiene

$$(x_B, y_B, z_B) = (\frac{4}{7}\ell, \frac{2\sqrt{3}}{7}\ell, 0).$$

2. La matrice di inerzia è simmetrica e si scrive

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

con $I_{ij} = I_{ji}$ per ogni $i \neq j$. L'asse Oz è un asse principale di inerzia perché il corpo rigido ha una simmetria per riflessione rispetto al piano Oxy, quindi

$$I_{13} = I_{23} = 0.$$

Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} I_{11} &= (4m)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\Big)^2 = 3m\ell^2, \\ I_{22} &= (2m)\ell^2 + (4m)\Big(\frac{1}{2}\ell\Big)^2 = 3m\ell^2, \\ I_{33} &= I_{11} + I_{22} = 6m\ell^2, \\ I_{12} &= -(4m)\Big(\frac{1}{2}\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\Big) = -\sqrt{3}m\ell^2. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$I_O = m\ell^2 \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

sono le radici di

$$\lambda^2 - 6\lambda + 6 = 0,$$

cioé

$$\lambda_1 = 3 - \sqrt{3}, \qquad \lambda_2 = 3 + \sqrt{3}.$$

Due autovettori associati a λ_1, λ_2 rispettivamente sono

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

per cui due direzioni principali rispetto a O nel piano Oxy sono la bisettrice del primo e terzo quadrante e la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Secondo Esercizio

1. La forza centrale si scrive

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho},$$

con

$$f(\rho) = -\mathcal{V}'(\rho) = -\frac{2k\rho}{r^2+\rho^2}.$$

2. L'energia potenziale efficace si scrive

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2} = k\log\Big(1+\frac{\rho^2}{r^2}\Big) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Consideriamo condizioni iniziali per cui

$$c = 2r\sqrt{km}$$

e mostriamo che c'è un unico punto stazionario positivo di $\mathcal{V}_{\text{eff}}$. Si ha

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = \frac{2k\rho}{r^2+\rho^2} - \frac{c^2}{m\rho^3},$$

per cui, da $\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ si trova l'equazione polinomiale

$$2km\rho^4 - c^2\rho^2 - c^2r^2 = 0.$$

L'unica radice positiva è

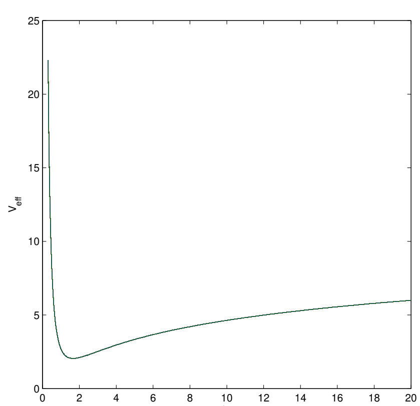
$$\bar{\rho} = \Big(\sqrt{1+\sqrt{3}}\Big)r,$$

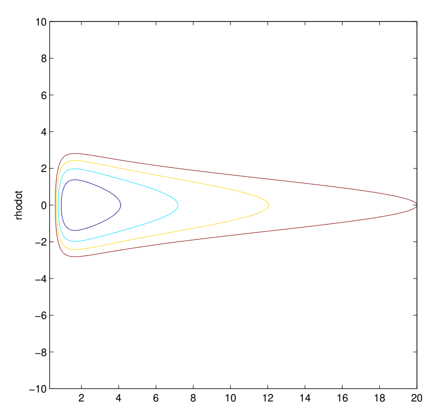
che corrisponde al raggio dell'unica traiettoria circolare esistente per il valore scelto di c.

3. Tenendo conto dei limiti

$$\lim_{\rho\to 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

e di quanto dimostrato al punto precedente, possiamo tracciare qualitativamente il grafico di $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ (a sinistra) ed il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto (a destra):





4. Dallo studio fatto nei punti precedenti si ha

$$h_{\min} = \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\rho}) = k\Big(\log(2+\sqrt{3}) + \frac{2}{1+\sqrt{3}}\Big).$$

Terzo Esercizio

1. Si ha

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}\ell}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell} = 1,$$

quindi

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

2. Supponiamo inizialmente che il corpo $\mathcal{D}$ sia scarico, cioè che su di esso non agiscano forze attive esterne. Indichiamo con

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A^{(1)}, \quad \vec{\boldsymbol{\Phi}}_C^{(1)}$$

le reazioni vincolari che l'asse Ox e il corpo $\mathcal{D}$ esercitano sull'asta AC in questa ipotesi. Usando il metodo di scomposizione, sia l'asta AC che il corpo $\mathcal{D}$ devono soddisfare le equazioni cardinali della Statica individualmente.

Sull'asta AC agiscono la forza di gravità, equivalente ad un'unica forza $-mg\hat{\boldsymbol{e}}_2$ applicata nel baricentro e le reazioni $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A^{(1)}, \vec{\boldsymbol{\Phi}}_C^{(1)}$. Perché AC sia in equilibrio deve valere

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C^{(1)} \neq \vec{\boldsymbol{0}}.$$

Per il principio di azione e reazione l'asta AC esercita su $\mathcal{D}$ una forza $-\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C^{(1)}$. Le forze di reazione esercitate dall'asse Oy su $\mathcal{D}$ devono quindi avere risultante non nulla e sono equivalenti ad un'unica forza $F^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_1$ applicata ad un punto del loro asse centrale. Dalla prima equazione cardinale della Statica applicata a $\mathcal{D}$ si ottiene

$$-\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C^{(1)} + F^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \vec{\boldsymbol{0}}.$$

Dall'equazione precedente si ottiene che $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C^{(1)}$ è diretta lungo $\hat{\boldsymbol{e}}_1$:

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C^{(1)} = F^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_1.$$

Le equazioni cardinali della Statica per l'asta (la seconda equazione è calcolata rispetto ad A) ci danno

$$F^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - mg\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{\Phi}}_A^{(1)} = \vec{\boldsymbol{0}},$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}mg\ell - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\ell F^{(1)} = 0,$$

da cui si ottiene

$$F^{(1)} = \frac{mg}{2}, \qquad \vec{\boldsymbol{\Phi}}_A^{(1)} = -\frac{mg}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + mg\hat{\boldsymbol{e}}_2.$$

Supponiamo adesso che l'asta AC sia scarica e indichiamo con

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A^{(2)}, \qquad \vec{\boldsymbol{\Phi}}_C^{(2)}$$

le reazioni vincolari che l'asse Ox e il corpo $\mathcal{D}$ esercitano sull'asta AC in questa ipotesi. Dalle equazioni cardinali della Statica applicate all'asta AC si ottiene

$$\vec{\mathbf{\Phi}}_A^{(2)} + \vec{\mathbf{\Phi}}_C^{(2)} = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \vec{\mathbf{\Phi}}_A^{(2)} = \Phi_A^{(2,\theta)}\hat{\mathbf{e}}_\theta, \qquad \vec{\mathbf{\Phi}}_C^{(2)} = \Phi_C^{(2,\theta)}\hat{\mathbf{e}}_\theta, \tag{1}$$

dove

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2) = \frac{C-A}{|C-A|}.$$

Su $\mathcal{D}$ agiscono la forza di gravità, equivalente ad un'unica forza $-Mg\hat{\boldsymbol{e}}_2$ applicata nel baricentro B, la reazione $-\vec{\mathbf{\Phi}}_C^{(2)}$ (per il principio di azione e reazione) e le forze di reazione esercitate dall'asse Oy. Perché $\mathcal{D}$ sia in equilibrio queste ultime devono avere necessariamente risultante non nulla e sono quindi equivalenti ad un'unica forza $F^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_1$ applicata ad un punto del loro asse centrale. Dalla prima equazione cardinale della Statica applicata a $\mathcal{D}$ si ottiene

$$-Mg\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \vec{\mathbf{\Phi}}_C^{(2)} + F^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \vec{\mathbf{0}},$$

da cui si ottiene

$$\Phi_C^{(2,\theta)} = -\sqrt{2}Mg$$

e, per la prima delle (1),

$$\Phi_A^{(2,\theta)} = \sqrt{2}Mg.$$

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti concludo che

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{\Phi}}_A &= \vec{\mathbf{\Phi}}_A^{(1)} + \vec{\mathbf{\Phi}}_A^{(2)} = -(\frac{m}{2} + M)g\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (m+M)g\hat{\boldsymbol{e}}_2 \\
\vec{\mathbf{\Phi}}_C &= \vec{\mathbf{\Phi}}_C^{(1)} + \vec{\mathbf{\Phi}}_C^{(2)} = (\frac{m}{2} + M)g\hat{\boldsymbol{e}}_1 - Mg\hat{\boldsymbol{e}}_2
\end{aligned}$$

Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

14 Febbraio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

i) In un piano assegnato si fissi un sistema di riferimento $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$ e si consideri il sistema di forze applicate

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\boldsymbol{F}}_1, P_1), \ldots, (\vec{\boldsymbol{F}}_5, P_5)\}$$

con

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = j\hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad P_j = O + j\hat{\boldsymbol{e}}_1, \qquad j = 1, \ldots, 5.$$

Trovare l'asse centrale del sistema $\mathcal{F}$.

ii) In un piano assegnato si consideri un sistema di vettori applicati paralleli

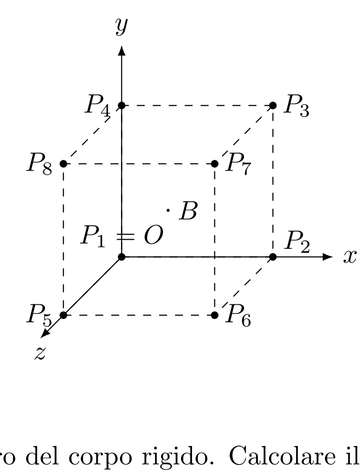
$$\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_1, P_1), \ldots, (\vec{\boldsymbol{v}}_N, P_N)\}, \qquad N > 1.$$

Si prendano in tale piano due rette r_1, r_2 parallele e distinte, aventi la stessa direzione dei vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ del sistema $\mathcal{S}$.

Mostrare che è possibile trovare un sistema di vettori applicati equivalente ad $\mathcal{S}$ costituito da al più due vettori paralleli alle rette r_1, r_2, applicati uno a un punto di r_1 e l'altro a un punto di r_2.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri un corpo rigido $\mathcal{C}$ formato da 8 punti materiali $P_1, \ldots, P_8$ di massa m posti ai vertici di un cubo di lato ℓ. Il punto P_1 del corpo si trova nell'origine O e i tre spigoli del cubo contenenti P_1 giacciono sugli assi Ox, Oy, Oz (vedi figura).

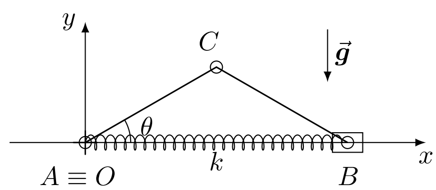


i) Sia B il baricentro del corpo rigido. Calcolare il momento di inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto all'asse passante per O e B.

ii) Consideriamo il vettore $\hat{\boldsymbol{e}}$, di coordinate (α, β, γ), con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $|\hat{\boldsymbol{e}}| = 1$. Calcolare il momento di inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto all'asse passante per O e parallelo ad $\hat{\boldsymbol{e}}$.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee, di uguale massa m e lunghezza 2ℓ, incernierate in un loro estremo C. L'estremo A della prima asta è incernierato nell'origine O. L'estremo B della seconda asta può scivolare sull'asse Ox ed è collegato all'origine O da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (vedi figura). Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usando come coordinata l'angolo θ che l'asta AC forma con l'asse Ox,

i) determinare le configurazioni di equilibrio al variare dei parametri m, g, k, ℓ tramite il principio dei lavori virtuali.

Si assuma che

$$mg = 4k\ell$$

e si consideri l'unica configurazione di equilibrio θ_0, con $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

ii) Per $\theta = \theta_0$ calcolare le reazioni vincolari nei punti B, C con le equazioni cardinali della Statica;

iii) ritrovare la reazione vincolare in C del punto ii) con il principio dei lavori virtuali.

Soluzioni

Primo Esercizio

i) Un punto Q dell'asse centrale è dato dalla formula

$$Q - O = \frac{\vec{\boldsymbol{R}} \times \vec{\boldsymbol{N}}_O}{|\vec{\boldsymbol{R}}|^2},$$

dove

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \sum_{j=1}^{5} j\hat{\boldsymbol{e}}_2 = 15\hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad \vec{\boldsymbol{N}}_O = \sum_{j=1}^{5} j\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times j\hat{\boldsymbol{e}}_2 = 55\hat{\boldsymbol{e}}_3.$$

Si ottiene quindi

$$Q - O = \frac{11}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_1.$$

L'asse centrale è la retta costituita dai punti

$$Q + \lambda\vec{\boldsymbol{R}},$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Scelte in modo arbitrario due rette r_1, r_2, parallele ai vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ e distinte tra loro, mostriamo che ogni sistema costituito da un solo vettore applicato $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ del sistema $\mathcal{S}$ ammette un sistema equivalente composto da due vettori paralleli alle rette r_1, r_2 (possibilmente nulli), applicati uno a un punto di r_1 e l'altro a un punto di r_2.

Fissiamo un riferimento $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$ nel piano assegnato in modo che $\vec{\boldsymbol{v}}_j \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{0}}$ per $j = 1, \ldots, N$. Quindi le rette r_1, r_2 sono parallele a $\hat{\boldsymbol{e}}_2$. Se $P_j \in r_1$ il sistema $\{(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j), (\vec{\boldsymbol{0}}, Q)\}$, con $Q \in r_2$ scelto arbitrariamente, soddisfa le proprietà richieste. Se $P_j \in r_2$ procedo in modo analogo.

Se invece $P_j \notin r_1 \cup r_2$ faccio la costruzione seguente. Dato $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ scelgo due punti $Q_1 \in r_1, Q_2 \in r_2$ in modo che

$$(Q_1 - P_j) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 = (Q_2 - P_j) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 \neq 0.$$

Osservo che possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j = \vec{\boldsymbol{v}}_j^{(1)} + \vec{\boldsymbol{v}}_j^{(2)}$$

dove

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j^{(1)} = \lambda_j^{(1)}(Q_1 - P_j), \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_j^{(2)} = \lambda_j^{(2)}(Q_2 - P_j)$$

per due coefficienti $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)} \neq 0$. Consideriamo le scomposizioni

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \beta_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \beta_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_2.$$

e osserviamo che si ha

$$\alpha_j^{(1)} = -\alpha_j^{(2)}$$

perché la componente di $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ lungo $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ è nulla.

Usando le operazioni elementari si vede quindi che un sistema equivalente al vettore applicato $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ è allora

$$\{(\beta_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_2, Q_1), (\beta_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_2, Q_2)\}.$$

Possiamo ripetere questa scomposizione per ogni vettore applicato del sistema $\mathcal{S}$ e concludiamo considerando il sistema equivalente ad $\mathcal{S}$ definito da

$$\{(\vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}, A_1), (\vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}, A_2)\},$$

dove

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(1)} \hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(2)} \hat{\boldsymbol{e}}_2$$

e A_1, A_2 sono rispettivamente due punti qualunque delle rette r_1, r_2.

Secondo Esercizio

i) Posto

$$\hat{\boldsymbol{e}}_B = \frac{B-O}{|B-O|},$$

il momento di inerzia rispetto all'asse passante per O e B si scrive

$$I_{O\hat{\boldsymbol{e}}_B} = \hat{\boldsymbol{e}}_B \cdot \mathfrak{I}_O \hat{\boldsymbol{e}}_B.$$

Osserviamo che il momento di inerzia rispetto ad un asse non dipende dal polo scelto sull'asse, quindi

$$I_{O\hat{\boldsymbol{e}}_B} = I_{B\hat{\boldsymbol{e}}_B}.$$

Per il corpo rigido considerato ogni asse passante per il baricentro è principale e si ha

$$I_{B\hat{\boldsymbol{e}}_B} = I_{B\hat{\boldsymbol{e}}},$$

dove $\hat{\boldsymbol{e}}$ è un qualunque vettore unitario. Scegliendo ad esempio $\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{e}}_1$ e considerato che tutti i punti del corpo si trovano a distanza $d = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$ dall'asse $O\hat{\boldsymbol{e}}_1$, si trova

$$I_{O\hat{\boldsymbol{e}}_B} = 8md^2 = 4m\ell^2.$$

ii) Sia $\hat{\boldsymbol{e}}$ il vettore unitario di coordinate (α, β, γ). Per il teorema di Huygens-Steiner si ha

$$I_{O\hat{\boldsymbol{e}}} = I_{B\hat{\boldsymbol{e}}} + (8m)d^2,$$

dove

$$I_{B\hat{\boldsymbol{e}}} = 4m\ell^2$$

per il risultato del punto precedente e d è la distanza tra gli assi $O\hat{\boldsymbol{e}}$ e $B\hat{\boldsymbol{e}}$. Quest'ultima è data da

$$d = |(B-O) \times \hat{\boldsymbol{e}}| = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma},$$

infatti

$$(B-O) \times \hat{\boldsymbol{e}} = \frac{\ell}{2}\big[(\beta-\gamma)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (\gamma-\alpha)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + (\alpha-\beta)\hat{\boldsymbol{e}}_3\big].$$

In conclusione si ottiene

$$I_{O\hat{\boldsymbol{e}}} = 4m\ell^2(2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma).$$

Terzo Esercizio

i) Le forze attive sono conservative e la loro energia potenziale è

$$V(\theta) = 2mg\ell\sin\theta + \frac{1}{2}k(4\ell\cos\theta)^2.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti stazionari di V. L'equazione

$$V'(\theta) = 2\ell\cos\theta(mg - 8k\ell\sin\theta) = 0$$

ha come soluzioni

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

e, se $\frac{mg}{8k\ell} < 1$, anche

$$\theta_3 = \arcsin\Big(\frac{mg}{8k\ell}\Big), \qquad \theta_4 = \pi - \theta_3.$$

ii) Poiché

$$\frac{mg}{4k\ell} = 1, \tag{1}$$

si ha

$$\theta_0 = \arcsin\Big(\frac{mg}{8k\ell}\Big) = \arcsin\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{6}.$$

Sia

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C = \Phi_{C,x}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \Phi_{C,y}\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

la reazione vincolare esercitata dall'asta BC sull'asta AC nel punto di cerniera C. Detto G_1 il baricentro dell'asta AC, la seconda equazione cardinale della Statica per l'asta AC con polo O si scrive

$$(G_1 - O) \times (-mg\hat{\boldsymbol{e}}_2) + (C - O) \times \vec{\boldsymbol{\Phi}}_C = \vec{\boldsymbol{0}},$$

da cui si ottiene

$$-mg\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\Phi_{C,y} - 2\Phi_{C,x} = 0. \tag{2}$$

Sia

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_B = \Phi_{B,y}\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

la reazione vincolare esercitata dall'asse Ox sull'asta BC nel punto di cerniera B. Usando il principio di azione e reazione per la reazione vincolare in C, la prima equazione cardinale della Statica per l'asta BC si scrive

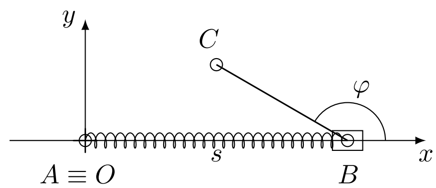
$$-\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C - mg\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \Phi_{B,y}\hat{\boldsymbol{e}}_2 - 4k\ell\cos\theta_0\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \vec{\boldsymbol{0}},$$

da cui si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} \Phi_{C,x} &= -2\sqrt{3}k\ell, \\ -\Phi_{C,y} - mg + \Phi_{B,y} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Dalle relazioni (1), (2), (3) si ottiene

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{\Phi}}_C = -2\sqrt{3}k\ell\hat{\boldsymbol{e}}_1 + (\frac{mg}{2} - 2k\ell)\hat{\boldsymbol{e}}_2 = -2\sqrt{3}k\ell\hat{\boldsymbol{e}}_1, \\ &\vec{\boldsymbol{\Phi}}_B = mg\hat{\boldsymbol{e}}_2 = 4k\ell\hat{\boldsymbol{e}}_2. \end{aligned}$$



iii) Se eliminiamo la cerniera in C l'asta BC acquista 2 gradi di libertà. Detta s l'ascissa del punto B e φ l'angolo che l'asta BC forma con l'asse Ox (vedi figura) si ha

$$\boldsymbol{\chi}_B = (s, 0)^T, \qquad \boldsymbol{\chi}_C = (s + 2\ell\cos\varphi, 2\ell\sin\varphi)^T$$

e gli spostamenti virtuali si scrivono

$$\delta\boldsymbol{\chi}_B = (\delta s, 0)^T, \qquad \delta\boldsymbol{\chi}_C = (\delta s - 2\ell\sin\varphi_0\delta\varphi, 2\ell\cos\varphi_0\delta\varphi)^T,$$

con

$$\sin\varphi_0 = \sin(\pi - \theta_0) = \frac{1}{2}, \qquad \cos\varphi_0 = \cos(\pi - \theta_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Poniamo inoltre

$$s_0 = 4\ell\cos\theta_0 = 2\sqrt{3}\ell.$$

Detto G_2 il baricentro dell'asta BC, usando il principio dei lavori virtuali scriviamo

$$\delta\mathcal{L}^{(a)}_{BC} = -\boldsymbol{\Phi}_C \cdot \delta\boldsymbol{\Phi}_C - mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_{G_2} - ks_0\boldsymbol{e}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_B = 0$$

per ogni spostamento virtuale, quindi

$$-\Phi_{C,x}(\delta s - \ell\delta\varphi) + \Phi_{C,y}\sqrt{3}\ell\delta\varphi + mg\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\delta\varphi - k2\sqrt{3}\ell\delta s = 0$$

per ogni $\delta s, \delta\varphi$. Dall'indipendenza di δs e $\delta\varphi$ si ottiene

$$\Phi_{C,x} = -2\sqrt{3}k\ell,$$
$$\Phi_{C,x} + \sqrt{3}\Phi_{C,y} + \frac{\sqrt{3}}{2}mg = 0.$$

Dalle equazioni precedenti, usando (1), si trova

$$\Phi_{C,y} = 0.$$

Compito di Meccanica Razionale

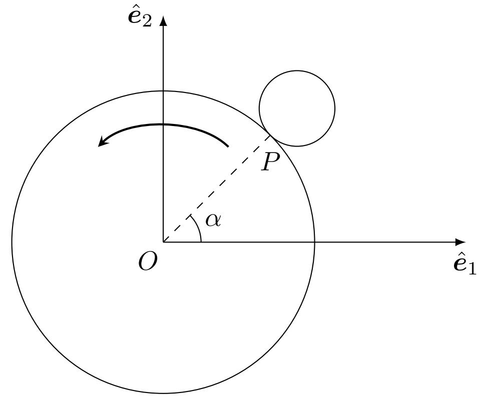
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

4 Giugno 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$ e si consideri nel piano $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$ un disco rigido omogeneo $\mathcal{D}_1$ di raggio R con il centro di massa fissato in O. Il disco $\mathcal{D}_1$ ruota con velocità angolare costante $\omega\hat{\boldsymbol{e}}_3$ $(\omega > 0)$ intorno all'asse $O\hat{\boldsymbol{e}}_3$. Sempre nel piano $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$ si consideri un secondo disco rigido omogeneo $\mathcal{D}_2$ di raggio r e massa m che rotola senza strisciare sul bordo di $\mathcal{D}_1$.



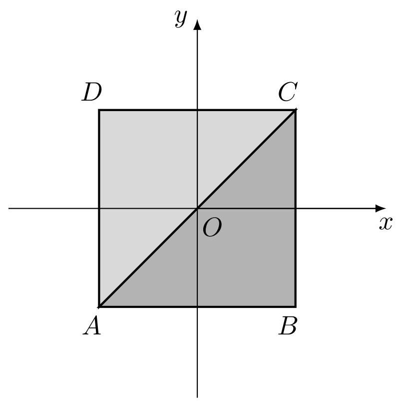
Indicando con α l'angolo tra $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ e $P - O$, dove P è il punto di contatto tra i due dischi (si veda la figura), determinare:

i) la velocità angolare e l'energia cinetica del disco $\mathcal{D}_2$;

ii) la posizione del suo centro istantaneo di rotazione nei due casi $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\alpha} = \omega$.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri una lamina quadrata di lato ℓ e vertici A, B, C, D. Il centro del quadrato coincide con O e i lati AB, BC sono paralleli agli assi Ox, Oy. La lamina è costituita da due triangoli omogenei ABC, ACD di densità μ, 2μ rispettivamente (si veda la figura).

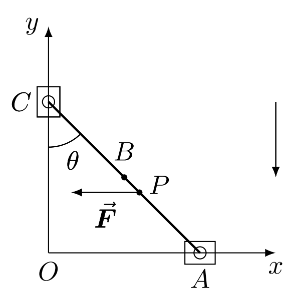


i) Calcolare la matrice di inerzia I_O della lamina nel riferimento $Oxyz$.

ii) Trovare una base principale di inerzia con origine in O, motivando la risposta.

ii) Calcolare le coordinate del baricentro della lamina.

Terzo Esercizio



In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri un'asta di estremi A, C avente massa m e lunghezza 2ℓ. Gli estremi dell'asta sono vincolati a scivolare sugli assi Ox e Oy (vedi figura). Si usi come coordinata l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Inoltre una forza $\vec{\boldsymbol{F}} = -F\hat{\boldsymbol{e}}_1$ costante, dove $F > 0$ ed $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ è il versore dell'asse Ox, viene applicata nel punto P dell'asta di coordinate $(x, y) = (\lambda \sin\theta, (2\ell - \lambda)\cos\theta)$, con $0 < \lambda \leq 2\ell$. Assumiamo che il sistema sia in equilibrio con $\theta = \pi/4$.

1. Usare il principio dei lavori virtuali per determinare, in dipendenza di λ, l'intensità della forza F.

2. Trovare l'asse centrale del sistema di forze applicate composto da $\vec{\boldsymbol{F}}$ e dalla forza di gravità e mostrare che per ogni $\lambda \in (0, 2\ell]$ tale sistema è equivalente ad un'unica forza applicata ad un punto opportuno dell'asta.

3. Trovare l'asse centrale delle reazioni vincolari agenti sull'asta nei punti A e C.

Soluzioni

Primo Esercizio

i) Poiché il moto è piano la velocità angolare del disco $\mathcal{D}_2$ è della forma $\vec{\boldsymbol{\omega}}_2 = \omega_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$, con $\omega_2 \in \mathbb{R}$. Il coefficiente ω_2 si può ottenere calcolando la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_P^{(1)}$ del punto P del disco $\mathcal{D}_1$ con la formula fondamentale della cinematica rigida applicata ai punti P, O di $\mathcal{D}_1$, imponendo l'ipotesi di puro rotolamento $\vec{\boldsymbol{v}}_P^{(1)} = \vec{\boldsymbol{v}}_P^{(2)}$, dove $\vec{\boldsymbol{v}}_P^{(2)}$ è la velocità del punto P del disco $\mathcal{D}_2$, e applicando di nuovo la formula fondamentale ai punti B, P di $\mathcal{D}_2$. Poniamo

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha = -\sin\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \cos\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_2.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}}_P^{(1)} &= \omega\hat{\boldsymbol{e}}_3 \times (P - O) = \omega R\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha,\\
\vec{\boldsymbol{v}}_P^{(2)} &= \vec{\boldsymbol{v}}_P^{(1)},\\
\vec{\boldsymbol{v}}_B &= \vec{\boldsymbol{v}}_P^{(2)} + \omega_2\hat{\boldsymbol{e}}_3 \times (B - P),
\end{aligned}$$

dove

$$\vec{\boldsymbol{v}}_B = (R + r)\dot{\alpha}\hat{\boldsymbol{e}}_\alpha.$$

Si ottiene

$$\omega_2 = \frac{1}{r}[(R + r)\dot{\alpha} - \omega R].$$

L'energia cinetica si può calcolare con il teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{\boldsymbol{v}}_B|^2 + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathfrak{I}_B\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}m(R + r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{4}m[(R + r)\dot{\alpha} - \omega R]^2.$$

ii) Indichiamo con C_0 il centro istantaneo di rotazione. Si ha

$$C_0 - B = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \vec{\boldsymbol{v}}_B}{\omega_2^2} = \frac{r(R + r)\dot{\alpha}}{\omega R - (R + r)\dot{\alpha}}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho,$$

dove

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\alpha\hat{\boldsymbol{e}}_2.$$

Se $\dot{\alpha} = 0$ si ha $C_0 = B$. Se invece $\dot{\alpha} = \omega$ si ha

$$C_0 = B + \frac{r(R + r)\omega}{\omega R - (R + r)\omega}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = B - (R + r)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = O.$$

Secondo Esercizio

i) Calcoliamo i coefficienti $I_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq 3$ della matrice di inerzia nel riferimento $Oxyz$. La direzione di Oz è principale perché la lamina ha la proprietà di simmetria per riflessione rispetto al piano Oxy. Ne segue che $I_{13} = I_{23} = 0$ e $I_{33} = I_{11} + I_{22}$. Indichiamo con τ_1, τ_2 i due domini che descrivono nel piano Oxy i triangoli omogenei che compongono la lamina:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{(x, y) : |x| \leq \ell/2, -\ell/2 \leq y \leq x\},\\
\tau_2 &= \{(x, y) : |y| \leq \ell/2, -\ell/2 \leq x \leq y\}.
\end{aligned}$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_{\tau_1} \mu y^2 dxdy + \int_{\tau_2} 2\mu y^2 dxdy \\
&= \int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_{-\ell/2}^{x} \mu y^2 dxdy + \int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_{x}^{\ell/2} 2\mu y^2 dxdy = \frac{\mu\ell^4}{8}, \\
I_{22} &= \int_{\tau_1} \mu x^2 dxdy + \int_{\tau_2} 2\mu x^2 dxdy \\
&= \int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_{-\ell/2}^{x} \mu x^2 dxdy + \int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_{x}^{\ell/2} 2\mu x^2 dxdy = \frac{\mu\ell^4}{8}, \\
I_{12} &= -\int_{\tau_1} \mu xy dxdy - \int_{\tau_2} 2\mu xy dxdy \\
&= -\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_{-\ell/2}^{x} \mu xy dxdy - \int_{-\ell/2}^{\ell/2}\int_{x}^{\ell/2} 2\mu xy dxdy = 0.
\end{aligned}$$

Inoltre, per quanto detto prima,

$$I_{33} = \frac{\mu\ell^4}{4}$$

ii) Il riferimento $\Sigma = Oxyz$ è principale in quanto la matrice di inerzia trovata al punto precedente è diagonale. Osserviamo che, poiché $I_{11} = I_{22}$, sono principali anche tutti i riferimenti ottenuti ruotando Σ attorno all'asse Oz di un angolo arbitrario.

iii) Il baricentro B della lamina è dato dalla formula

$$B - O = \frac{1}{m}[m_1(B_1 - O) + m_2(B_2 - O)],$$

in cui B_1, B_2 sono i baricentri dei triangoli ABC, ACD rispettivamente, m_1, m_2 le loro masse ed $m = m_1 + m_2$ la massa totale della lamina. Si ha

$$m_1 = \mu\ell^2/2, \qquad m_2 = \mu\ell^2.$$

Le coordinate di B_1, B_2 in Σ sono

$$B_1 \equiv (\ell/6, -\ell/6), \qquad B_2 \equiv (-\ell/6, \ell/6),$$

per cui le coordinate di B sono

$$B \equiv (-\ell/18, \ell/18).$$

Terzo Esercizio

1. Sia B il baricentro dell'asta AC. Si può sostituire alla forza di gravità, agente sui diversi elementi materiali che compongono l'asta, un'unica forza $-mg\boldsymbol{e}_2$ applicata a B. Il principio dei lavori virtuali si scrive

$$\delta\mathcal{L} = -mg\boldsymbol{e}_2 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_B - F\boldsymbol{e}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_P = 0$$

per ogni spostamento virtuale del sistema. Nella formula precedente si ha

$$\delta\boldsymbol{\chi}_B = (\ell\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \ell\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_2)\delta\theta, \qquad \delta\boldsymbol{\chi}_P = (\lambda\cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_1 - (2\ell-\lambda)\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_2)\delta\theta,$$

dove $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si ottiene quindi che

$$F = \frac{mg\ell}{\lambda}.$$

2. La risultante delle forze attive è

$$\vec{\boldsymbol{R}} = -F\hat{\boldsymbol{e}}_1 - mg\hat{\boldsymbol{e}}_2 = -mg(\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\ell}{\lambda}\hat{\boldsymbol{e}}_1)$$

ed è diversa da $\vec{\boldsymbol{0}}$, per cui esiste l'asse centrale.Per calcolarlo si può considerare il sistema di forze applicate equivalente $\{(-F\hat{\boldsymbol{e}}_1, P), (-mg\boldsymbol{e}_2, B)\}$. Tale sistema di forze ha trinomio invariante nullo, quindi possiamo cercare un punto Q di coordinate (x, y) dell'asse centrale risolvendo l'equazione

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \vec{\boldsymbol{0}},$$

che ci dà l'equazione

$$x = \frac{\ell}{\lambda}y + \sqrt{2}\ell(1 - \frac{\ell}{\lambda}). \tag{1}$$

Mostriamo che l'asse interseca l'asta per ogni scelta di $\lambda \in (0, 2\ell]$. I punti dell'asta soddisfano l'equazione

$$y = \sqrt{2}\ell - x.$$

Sostituendo questa in (1) si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{2}\ell}{1 + \frac{\ell}{\lambda}}$$

che appartiene all'intervallo $(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\ell]$ per $\lambda \in (0, 2\ell]$ e questi sono tutti valori della coordinata x di punti dell'asta.

3. Poiché il sistema è in equilibrio, le reazioni vincolari in A, C formano un sistema di forze opposto a quello delle forze attive, pertanto l'asse centrale relativo alle reazioni vincolari è lo stesso del punto precedente.

Compito di Meccanica Razionale

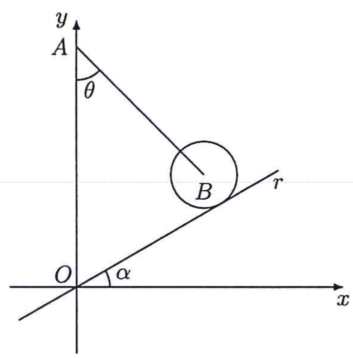
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

25 Giugno 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in un piano un sistema di riferimento Oxy. Un disco rigido omogeneo di raggio R può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea r fissa passante per l'origine, che forma un angolo $\alpha = \pi/3$ con l'asse Ox. Un'asta rigida omogenea di lunghezza ℓ ha l'estremo B vincolato al baricentro del disco e l'altro estremo A vincolato a scorrere sull'asse Oy.



Usando come coordinata l'angolo θ tra l'asta e l'asse Oy (vedi figura),

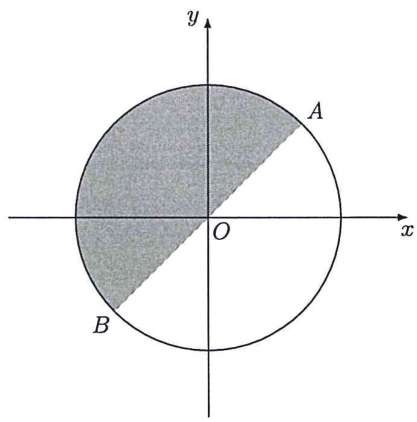
a) determinare le velocità angolari dell'asta e del disco;

b) calcolare l'energia cinetica dell'asta e del disco;

c) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta e spiegare come si può ottenere la posizione di C_0 per via grafica.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri un disco di raggio R. Il centro del disco coincide con O ed è costituito da due semidischi omogenei di densità μ, 2μ rispettivamente, separati dal diametro AB che forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse Ox (vedi figura).

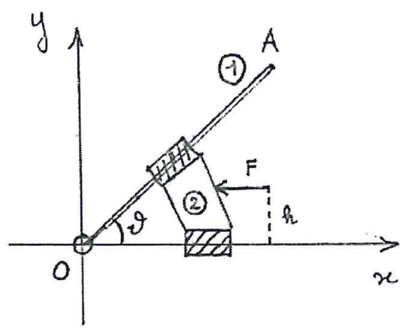


i) Calcolare la matrice di inerzia I_O del disco nel riferimento $Oxyz$.

ii) Trovare una base principale di inerzia con origine in O, motivando la risposta.

ii) Calcolare le coordinate del baricentro del disco.

Terzo Esercizio



In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura, costituito da due corpi rigidi. Il primo corpo è un'asta con un estremo incernierato nell'origine O tramite una coppia rotoidale fissa. L'asta è collegata al secondo corpo tramite una coppia prismatica e un'altra coppia prismatica collega il secondo corpo all'asse Ox (vedi figura). Una forza $\vec{F} = -F\hat{e}_1$, con $F > 0$, parallela all'asse Ox, agisce sul secondo corpo e la sua retta d'azione ha distanza h dall'asse Ox. Tutti i vincoli sono privi di attrito. Sapendo che l'asta forma un angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$ con gli assi coordinati trovare le reazioni vincolari che sono esercitate sui due corpi.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Introduciamo s, coordinata di P, che è il punto di contatto del disco con la guida, tale che $s>0$ se $x_P>0$ ed $s<0$ se $x_P<0$. Allora vale

$$(1) \qquad s\cos\alpha = l \operatorname{sen}\theta + R \operatorname{sen}\alpha.$$

Le coordinate di A, B sono

$$x_A = 0, \quad y_A = s\operatorname{sen}\alpha + R\cos\alpha + l\cos\theta,$$

$$x_B = l\operatorname{sen}\theta, \quad y_B = s\operatorname{sen}\alpha + R\cos\alpha,$$

ed inserendo l'espressione di s in funzione di θ che si ricava da (1) esse diventano

$$x_A = 0, \quad y_A = l(\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta) + 2R,$$

$$x_B = l\operatorname{sen}\theta, \quad y_B = \sqrt{3}\, l \operatorname{sen}\theta + 2R.$$

---

a) La velocità angolare dell'asta è $\vec{\omega}^{(a)} = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$, con $\hat{e}_3$ vettore unitario avente direzione perpendicolare al piano Oxy e verso concorde a quello dell'asse Oz.
Per trovare la velocità angolare del disco scriviamo la formula

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}^{(d)} \times (P-B),$$

dalla quale tenendo conto che $\vec{v}_P = \vec{0}$ si trova

$$\vec{\omega}^{(d)} = \frac{-2\dot{\theta}\, l\cos\theta}{R}\,\hat{e}_3.$$

b) Dalle formule

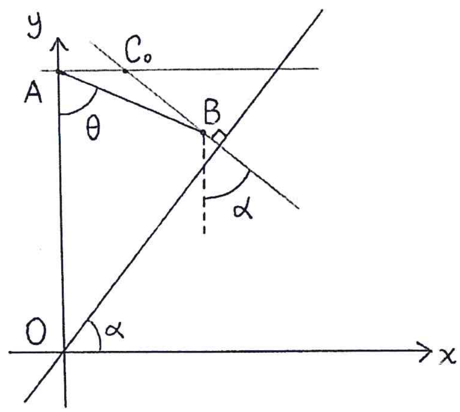
$$T^{(a)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} I^{(a)} |\vec{\omega}^{(a)}|^2, \qquad T^{(d)} = \frac{1}{2} M |\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} I^{(d)} |\vec{\omega}^{(d)}|^2$$

con m, M massa dell'asta e del disco, rispettivamente, $\vec{v}_G$ velocità del baricentro dell'asta e $I^{(a)} = \dfrac{ml^2}{12}$, $I^{(d)} = \dfrac{MR^2}{2}$, si ottiene

$$T^{(a)} = \frac{m \ell^2 \dot{\theta}^2}{2} \left[\frac{1}{3} + \sqrt{3} \cos\theta \left(\sqrt{3} \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \right) \right],$$

$$T^{(d)} = 3 M \ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta .$$

c)



Le coordinate di C_o sono

$$x_{C_o} = \ell \operatorname{sen}\theta - \sqrt{3}\, \ell \cos\theta,$$

$$y_{C_o} = y_A = \ell \left(\cos\theta + \sqrt{3} \operatorname{sen}\theta \right) + 2R.$$

Esercizio 2

i) Il piano Oxy è un piano di simmetria per riflessione, quindi

$$I_{13} = I_{23} = 0 .$$

Calcoliamo le altre componenti di I_O passando a coordinate polari (ρ, ϑ) nel piano Oxy, con $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$.

$$I_{33} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\int_0^R 2\mu\rho^3\,d\rho\,d\vartheta + \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi}\int_0^R \mu\rho^3\,d\rho\,d\vartheta = \frac{3}{4}\pi\mu R^4$$

$$I_{11} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\int_0^R 2\mu\rho^3\sin^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta + \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi}\int_0^R \mu\rho^3\sin^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \frac{3}{8}\pi\mu R^4$$

in cui abbiamo usato il fatto che $\int \sin^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta}{2} + \text{costante}$

$$I_{12} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\int_0^R 2\mu\rho^3\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta + \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi}\int_0^R \mu\rho^3\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = 0$$

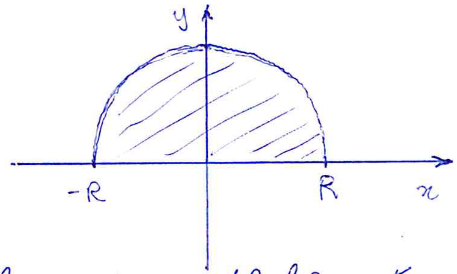
in cui abbiamo usato $\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Infine I_{22} si può ottenere dalla relazione $I_{11} + I_{22} = I_{33}$ che vale perché il corpo studiato è piano ed il polo O giace nel piano del corpo:

$$I_{22} = I_{33} - I_{11} = \frac{3}{8}\pi\mu R^4$$

ii) Poiché la matrice I_O è diagonale una base principale di inerzia è proprio la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ associata al riferimento $Oxyz$.

iii) Calcolo prima il baricentro del semidisco omogeneo disegnato in figura



Indico con x_B, y_B le coordinate del baricentro.

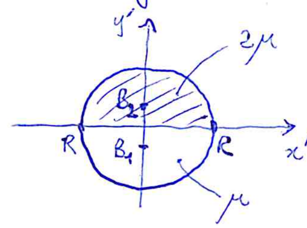
Per simmetria si ha. $x_B = 0$.

Sia σ la densità del semidisco, per cui la sua massa è $m = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$

Si ottiene $$m y_B = \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho^2 \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = \frac{2\sigma R^3}{3}$$

per cui $$y_B = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

Calcolo adesso il baricentro del disco considerato in un riferimento ruotato di $\frac{\pi}{4}$ rispetto al riferimento considerato, ~~ad Oxyz~~ come in figura



I baricentri dei due semidischi hanno coordinate

$$\begin{cases} x'_{B_1} = 0 \\ y'_{B_1} = -\frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_{B_2} = 0 \\ y'_{B_2} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \end{cases}$$

Le masse dei due semidischi sono $m_1 = \mu \frac{\pi R^2}{2}$, $m_2 = \mu \pi R^2$

per cui la massa totale del disco è $m = \frac{3}{2} \mu \pi R^2$

La coordinata y' del baricentro del disco è $$y'_B = \frac{m_1 y_{B_1} + m_2 y_{B_2}}{m} = \frac{4}{9}\frac{R}{\pi}$$

Per ottenere le coordinate del baricentro del disco nel riferimento di partenza basta applicare una rotazione di $\frac{\pi}{4}$. Ottengo $$\begin{cases} x_B = -\frac{2}{9}\sqrt{2}\,\frac{R}{\pi} \\ y_B = \frac{2}{9}\sqrt{2}\,\frac{R}{\pi} \end{cases}.$$

Esercizio 3

L'asta OA è scarica. Dalla 1ª equazione cardinale della statica

si ha $\vec{\Phi}_O + \vec{\Phi}_{21} = \vec{0}$

dove $\vec{\Phi}_O$ è la reazione della coppia rotoidale in O

e $\vec{\Phi}_{21}$ è la risultante delle forze di reazione esercitate da ② su ①.

Osserviamo che $\vec{\Phi}_{21} \neq 0$. Infatti, se $\vec{\Phi}_{21} = \vec{0}$, per il principio di azione e reazione si avrebbe $\vec{\Phi}_{12} = \vec{0}$, dove $\vec{\Phi}_{12}$ è la risultante delle reazioni esercitate da ① su ② tramite la coppia prismatica.

Poiché le reazioni vincolari dell'asse Ox su ②, di risultante $\vec{\Phi}_{Ox}$, sono ortogonali all'asse stesso, il corpo ② non potrebbe stare in equilibrio.

Poiché $\vec{\Phi}_{21} \neq \vec{0}$, allora le forze di reazione di ② su ① sono equivalenti ad un'unica forza ($\vec{\Phi}_{21}$) applicata ad un punto dell'asse centrale di tali reazioni.

Poiché $\vec{\Phi}_{21} \perp OA$ e $\vec{\Phi}_O$ è applicata in O, dalla 2ª eq. cardinale della statica segue che l'asse centrale considerato passa per O ed è $\perp OA$.

Per il principio di azione e reazione le forze reattive di ① su ② sono equivalenti alla risultante $\vec{\Phi}_{12} = -\vec{\Phi}_{21} = \vec{\Phi}_O$ applicata in O.

Poiché $\vec{F}$ e $\vec{\Phi}_{12}$ non sono parallele e la 1ª eq. cardinale della statica per il corpo ② ci dà $\vec{F} + \vec{\Phi}_{Ox} + \vec{\Phi}_{12} = \vec{0}$, allora la risultante $\vec{\Phi}_{Ox}$ delle reazioni di Ox su ② è diversa da 0 e tali forze di reazione sono equivalenti ad un'unica forza ($\vec{\Phi}_{Ox}$) applicata ad un punto del loro asse centrale che è ortogonale a Ox e deve passare per il punto $P \equiv (-l_1, l_1)$.

Infatti, perché le tre forze non parallele $\vec{F}$, $\vec{\Phi}_{Ox}$, $\vec{\Phi}_{12}$ formino un sistema equilibrato, le loro linee di azione si devono incontrare in un punto.

Posto $\vec{\Phi}_O = \phi_O \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$, $\vec{\Phi}_{Ox} = \Phi_{Ox}\hat{e}_2$,

si ha $$-F\,\hat{e}_1 + \Phi_{Ox}\,\hat{e}_2 + \phi_O \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2) = 0$$

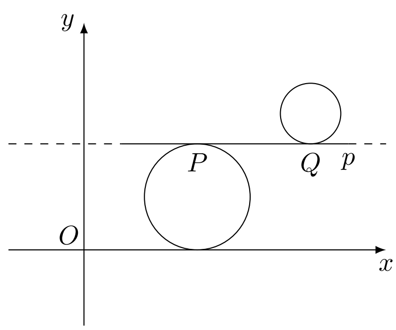
da cui $$\begin{cases} \Phi_{Ox} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\phi_O \\ F = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\phi_O \end{cases}$$

Quindi $\phi_O = \sqrt{2}\,F$, $\Phi_{Ox} = F$, $\vec{\Phi}_{12} = \vec{\Phi}_O = F(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$

Compito di Meccanica Razionale
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
16 Luglio 2019
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in un piano un sistema di riferimento Oxy. Un disco rigido $\mathcal{D}_1$ di raggio R rotola senza strisciare sull'asse Ox. Una guida rettilinea p è appoggiata al disco $\mathcal{D}_1$ e si mantiene parallela ad Ox. Su di essa rotola senza strisciare un disco rigido $\mathcal{D}_2$ di raggio r (si veda la figura). Chiamiamo P, Q i punti di contatto tra $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ e la guida p. Denotiamo con s l'ascissa del punto di contatto tra $\mathcal{D}_1$ e l'asse Ox. Assumendo che tra le ascisse dei punti P, Q valga la relazione $x_Q - x_P = k$, con $k > 0$ e costante,



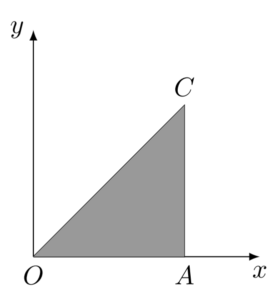
a) determinare le velocità angolari dei due dischi;

b) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 del disco $\mathcal{D}_2$;

c) descrivere la polare fissa (base) e la polare mobile (rulletta) del disco $\mathcal{D}_2$.

Secondo Esercizio

Si fissi un riferimento $Oxyz$ e si consideri nel piano Oxy un triangolo rettangolo omogeneo di massa m (vedi figura) con lati OA, AC di lunghezza ℓ.

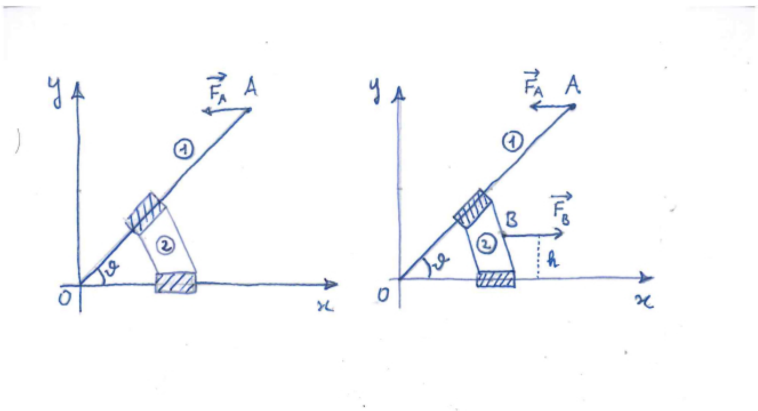


1. Calcolare i coefficienti della matrice di inerzia I_O, relativa al polo O e scritti nella base del riferimento $Oxyz$.

2. Trovare un riferimento principale di inerzia con origine in O.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura, costituito da due corpi rigidi. Il primo corpo è un'asta di lunghezza ℓ, con un estremo incernierato nell'origine O tramite una coppia rotoidale fissa. L'asta è collegata al secondo corpo tramite una coppia prismatica e un'altra coppia prismatica collega il secondo corpo all'asse Ox (vedi figura). Tutti i vincoli sono privi di attrito. Sapendo che l'asta forma un angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$ con gli assi coordinati trovare le reazioni vincolari che sono esercitate sui due corpi nei due casi seguenti:



i) sull'estremo A dell'asta agisce una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_A = -F_A\hat{\boldsymbol{e}}_1$, con $F_A > 0$, parallela all'asse Ox (vedi figura a sinistra);

ii) oltre alla forza $\vec{\boldsymbol{F}}_A$ del punto precedente c'è una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_B = F_B\hat{\boldsymbol{e}}_1$, con $F_B > 0$, che agisce sul punto B del secondo corpo a distanza h dall'asse Ox (vedi figura a destra).

Soluzioni

Primo Esercizio

<u>SOLUZIONE ESERCIZIO 1</u>

1) Velocità angolare del disco D_1. Introduciamo la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ con $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ versori associati agli assi Ox, Oy, ed $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$. Chiamiamo P' e B_1 il punto di contatto tra D_1 e la guida Ox e il baricentro di D_1, rispettivamente. Si ha

$$P' - O = s\,\hat{e}_1\,, \quad B_1 - O = s\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2\,.$$

Vale la relazione

$$\vec{v}_{P'} = \vec{v}_{B_1} + \vec{\omega}_1 \times (P' - B_1)$$

con

$$\vec{v}_{P'} = \vec{0}\,, \quad \vec{v}_{B_1} = \dot{s}\,\hat{e}_1\,, \quad \vec{\omega}_1 = \omega_1\,\hat{e}_3\,.$$

Si trova che $\vec{\omega}_1 = -\dfrac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3$.

Velocità angolare del disco D_2. Usiamo la relazione

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{B_2} + \vec{\omega}_2 \times (P - B_2)$$

dove B_2 è il baricentro di D_2 e $\vec{\omega}_2 = \omega_2\,\hat{e}_3$. Notiamo che

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q = \vec{\omega}_1 \times (P - P') = 2\,\dot{s}\,\hat{e}_1$$

e

$$\vec{v}_{B_2} = \dot{s}\,\hat{e}_1\,.$$

Allora si ottiene $\vec{\omega}_2 = \dfrac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3$.

2) Le coordinate di C_0 del disco D_2 si trovano dalla formula

$$C_0 = Q + \frac{\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_Q}{|\vec{\omega}_2|^2} = 2r\,\hat{e}_2 + Q\,,$$

quindi

$$C_0 - O = (s+k)\hat{e}_1 + 2(R+r)\hat{e}_2 .$$

3) Dal risultato del punto 2) si trova subito che la polare fissa è la retta $y = 2(R+r)$ e la polare mobile è la circonferenza del disco D_2.

Secondo Esercizio

1. La densità di massa del triangolo è

$$\sigma = \frac{2m}{\ell^2}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_0^\ell \int_0^x \sigma y^2 \, dydx = \sigma \int_0^\ell \frac{x^3}{3} \, dx = \frac{\sigma \ell^4}{12} = \frac{1}{6} m\ell^2, \\
I_{22} &= \int_0^\ell \int_0^x \sigma x^2 \, dydx = \sigma \int_0^\ell x^3 \, dx = \frac{1}{2} m\ell^2, \\
I_{33} &= I_{11} + I_{22} = \frac{2}{3} m\ell^2, \\
I_{12} &= -\int_0^\ell \int_0^x \sigma xy \, dydx = -\sigma \int_0^\ell \frac{x^3}{2} \, dx = -\frac{\sigma \ell^4}{8} = -\frac{1}{4} m\ell^2.
\end{aligned}$$

Inoltre $I_{13} = I_{23} = 0$ poiché Oxy è un piano di simmetria per riflessione. La matrice di inerzia I_O è simmetrica, per cui

$$I_O = m\ell^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

2. Il vettore

$$\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)^T$$

definisce una direzione principale di inerzia perché Oxy è un piano di simmetria per riflessione. Per trovare le altre due direzioni principali cerco gli autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

L'equazione per gli autovalori è

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

cioè

$$\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{48} = 0,$$

che ha le radici

$$\lambda_1 = \frac{4 + \sqrt{13}}{12}, \qquad \lambda_1 = \frac{4 - \sqrt{13}}{12}.$$

Cerco gli autovettori:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene

$$y = -\frac{2 + \sqrt{13}}{3} x$$

e, scegliendo $x = 1$, si trova l'autovettore

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(1, -\frac{2 + \sqrt{13}}{3}, 0\right)^T$$

della matrice I_O. Analogamente, dall'equazione

$$(A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$y = \frac{-2+\sqrt{13}}{3}x$$

e, scegliendo $x=1$, si trova l'autovettore

$$\boldsymbol{v}_2 = \left(1, \frac{-2+\sqrt{13}}{3}, 0\right)^T.$$

I vettori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_3$ sono ortogonali e individuano un riferimento principale di inerzia centrato in O.

Terzo Esercizio

i) Il secondo corpo, che chiameremo $\mathcal{C}$, è scarico. Denotiamo con $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{12}$ e $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{Ox}$ le risultanti delle reazioni dell'asta OA e dell'asse Ox su $\mathcal{C}$, esercitate tramite le due coppie prismatiche. Dalla prima equazione cardinale della Statica applicata a $\mathcal{C}$ si ottiene

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{12} + \vec{\boldsymbol{\Phi}}_{Ox} = \vec{\mathbf{0}}. \tag{1}$$

Osserviamo che si deve avere

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{12} = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{e} \qquad \vec{\boldsymbol{\Phi}}_{Ox} = \vec{\mathbf{0}},$$

infatti, poiché i vincoli sono lisci, se tali risultanti non fossero nulle, esse sarebbero ortogonali ad OA e Ox rispettivamente e quindi l'equazione (1) non potrebbe essere soddisfatta.

Indichiamo con $\vec{\boldsymbol{N}}_{12}$ e $\vec{\boldsymbol{N}}_{Ox}$ i momenti risultanti delle reazioni dell'asta OA e dell'asse Ox su $\mathcal{C}$. Dalla seconda equazione cardinale della Statica per $\mathcal{C}$ rispetto al polo O si ottiene

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{12} + \vec{\boldsymbol{N}}_{Ox} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Consideriamo adesso l'equilibrio dell'asta OA. Detta $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_O$ la risultante delle reazioni della coppia rotoidale sull'asta, questa si può pensare applicata al punto O. La prima e la seconda equazione cardinale della Statica (quest'ultima calcolata rispetto al polo O) per l'asta si scrivono

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\Phi}}_O - F_A\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \vec{\mathbf{0}}, \\ (A-O)\times\vec{\boldsymbol{F}}_A + \vec{\boldsymbol{N}}_{21} = \vec{\mathbf{0}}, \end{cases}$$

dove $\vec{\boldsymbol{N}}_{21}$ è il momento risultante delle reazioni di $\mathcal{C}$ sull'asta. Per il principio di azione e reazione si ha

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{21} = -\vec{\boldsymbol{N}}_{12}.$$

Concludo che nel caso i)

- le reazioni della coppia rotoidale su OA sono equivalenti alla forza

  $$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_O = F_A\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

  applicata in O;

- le reazioni di OA su $\mathcal{C}$ sono equivalenti ad una coppia di forze di momento

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{12} = (A - O) \times \vec{\boldsymbol{F}}_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell F_A \hat{\boldsymbol{e}}_3$$

  e, per il principio di azione e reazione, le reazioni di $\mathcal{C}$ su OA sono equivalenti ad una coppia di forze di momento $\vec{\boldsymbol{N}}_{21} = -\vec{\boldsymbol{N}}_{12}$;

- le reazioni di Ox su $\mathcal{C}$ sono equivalenti ad una coppia di forze di momento

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{Ox} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ell F_A \hat{\boldsymbol{e}}_3.$$

ii) Considero dapprima l'asta OA scarica. In questa ipotesi indichiamo con $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{12}$ e $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{Ox}$ le risultanti delle reazioni dell'asta OA e dell'asse Ox su $\mathcal{C}$, esercitate tramite le due coppie prismatiche. Denotiamo inoltre con $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_O$ la risultante delle reazioni della coppia rotoidale sull'asta, applicata nel punto O.

Dalla prima equazione cardinale della Statica per l'asta si ottiene

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_O + \vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{21} = \vec{\boldsymbol{0}},$$

dove $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{21}$ è la risultante delle reazioni di $\mathcal{C}$ su OA. Per il principio di azione e reazione si ha

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{21} = -\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{12}. \tag{2}$$

Osserviamo che $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{21} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$. Infatti, la prima equazione della Statica per $\mathcal{C}$ si scrive

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{12} + \vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{Ox} + \vec{\boldsymbol{F}}_B = \vec{\boldsymbol{0}}, \tag{3}$$

e, se $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{21} = \vec{\boldsymbol{0}}$, dalla (2) si avrebbe anche $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{12} = \vec{\boldsymbol{0}}$. Quindi $\mathcal{C}$ non sarebbe in equilibrio, infatti $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{Ox}$, se non è nulla, è ortogonale all'asse Ox.

Poiché $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{21} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$, allora le forze di reazione di $\mathcal{C}$ su OA sono equivalenti alla risultante $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{21}$ applicata ad un punto dell'asse centrale di tali reazioni. Inoltre, poiché $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{21}$ è ortogonale ad OA e $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_O$ è applicata in O, dalla seconda equazione cardinale della Statica per OA segue che l'asse centrale considerato passa per O ed è ortogonale ad OA.

Poiché $\vec{\boldsymbol{F}}_B$ e $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{12}$ non sono parallele, dall'equazione (3) si ottiene che $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{Ox} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$ e le forze di reazione di Ox su $\mathcal{C}$ sono equivalenti alla risultante $\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{Ox}$ applicata ad un punto del loro asse centrale, che è ortogonale a Ox e passa per il punto $P \equiv (-h, h)$. Infatti, affinché le tre forze non parallele $\vec{\boldsymbol{F}}_B, \vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{Ox}, \vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{12}$ formino un sistema equilibrato, le loro linee di azione si devono incontrare in un punto, che in questo caso è il punto P.

Posto

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{12} = \Phi'_{12} \frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2), \qquad \vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{Ox} = \Phi'_{Ox} \hat{\boldsymbol{e}}_2,$$

dalla (3) si ottiene che

$$\Phi'_{12} = \sqrt{2} F_B, \qquad \Phi'_{Ox} = -F_B.$$

Concludo che, nel caso ii), assumendo l'asta scarica,

- le reazioni della coppia rotoidale su OA sono equivalenti alla forza

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_O = F_B(-\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2)$$

  applicata in O;

- le reazioni di OA su $\mathcal{C}$ sono equivalenti ad una forza

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{12} = \vec{\boldsymbol{\Phi}}'_O$$

applicata in O;

- le reazioni di Ox su $\mathcal{C}$ sono equivalenti ad una forza

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}'_{Ox} = -F_B \hat{\boldsymbol{e}}_2$$

applicata nel punto $P \equiv (-h, h)$, dove la linea di azione di $\vec{\boldsymbol{F}}_B$ incontra la retta perpendicolare ad OA passante per O.

Per il principio di sovrapposizione degli effetti concludo che nel caso ii), includendo anche la forza $\vec{\boldsymbol{F}}_A$ agente sull'asta,

- la risultante delle reazioni della coppia rotoidale su OA è data da

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_O = F_A \hat{\boldsymbol{e}}_1 + F_B(-\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2) = (F_A - F_B)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + F_B \hat{\boldsymbol{e}}_2;$$

- le reazioni di OA su $\mathcal{C}$ sono equivalenti ad una forza

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{12} = F_B(-\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2)$$

applicata in O più una coppia di momento

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell F_A \hat{\boldsymbol{e}}_3$$

e, per il principio di azione e reazione, le reazioni di $\mathcal{C}$ su OA sono equivalenti ad una forza $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{21} = -\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{12}$ più una coppia di momento $\vec{\boldsymbol{N}}_{21} = -\vec{\boldsymbol{N}}_{12}$;

- le reazioni di Ox su $\mathcal{C}$ sono equivalenti ad una forza

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_{Ox} = -F_B \hat{\boldsymbol{e}}_2$$

applicata nel punto $P \equiv (-h, h)$ più una coppia di momento

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{Ox} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ell F_A \hat{\boldsymbol{e}}_3.$$

Compito di Meccanica Razionale

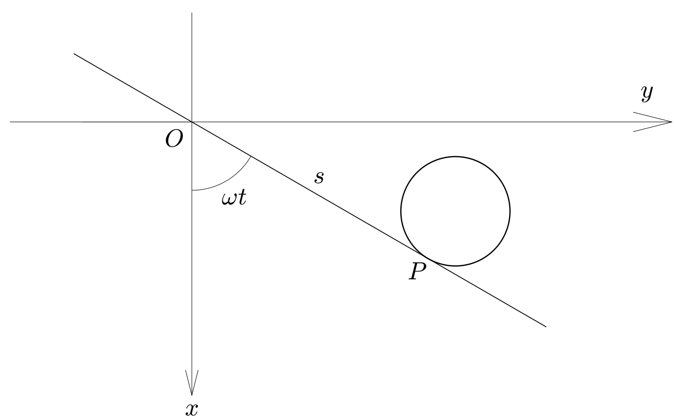
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

13 Settembre 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano, dotato di un sistema di riferimento Oxy, si consideri il sistema meccanico formato da una guida rettilinea r e da un disco omogeneo di massa m e raggio R (vedi figura). La guida è incernierata nell'origine O e ruota in questo piano con velocità angolare costante $\omega > 0$. Il disco rotola senza strisciare lungo la guida.



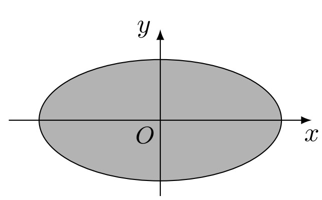
Usando come coordinata l'ascissa s del punto di contatto P tra disco e guida,

i) calcolare la velocità angolare e l'energia cinetica del disco;

ii) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione del disco.

Secondo Esercizio

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro O di un'ellisse omogenea di massa m e semiassi a, b, con $a > b > 0$.[1]



---

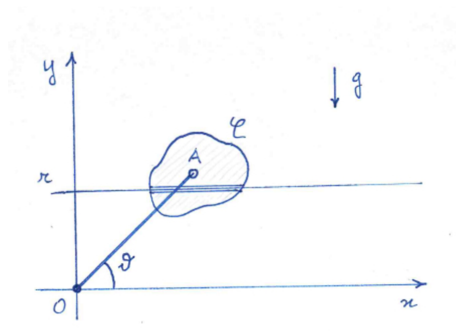
[1] *Suggerimento:* usare le coordinate ellittiche (r, θ) definite da

$$x = ra\cos\theta, \qquad y = rb\sin\theta, \qquad \text{con} \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

per descrivere l'ellisse.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura, costituito da due corpi rigidi. Il primo corpo è un'asta omogenea di lunghezza ℓ e massa m, con un estremo incernierato nell'origine O tramite una coppia rotoidale fissa. L'altro estremo dell'asta è incernierato nel baricentro A di un solido omogeneo $\mathcal{C}$ di massa M tramite una coppia rotoidale mobile. Il solido $\mathcal{C}$ può scivolare su una retta r parallela all'asse Ox e posta a distanza h da esso. Il vincolo tra $\mathcal{C}$ ed r consiste di una coppia prismatica (vedi figura). Il sistema è in equilibrio e, detto θ l'angolo tra l'asta OA e l'asse Ox, si ha $\theta = \frac{\pi}{4}$. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



Assumendo che tutti i vincoli siano privi di attrito,

i) calcolare un sistema di forze equivalente alle reazioni vincolari esercitate dalla cerniera cilindrica nell'origine O sull'asta OA;

ii) calcolare un sistema di forze equivalente alle reazioni vincolari esercitate dalla retta r sul corpo $\mathcal{C}$; in particolare trovare l'asse centrale di tali forze.

Soluzioni

Primo Esercizio

ESERCIZIO 1

Detti $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ i versori associati agli assi Ox, Oy, risulta conveniente introdurre i versori

$$\hat{e}_r = (\cos\omega t)\,\hat{e}_1 + (\operatorname{sen}\omega t)\,\hat{e}_2,$$

$$\hat{e}_\theta = -(\operatorname{sen}\omega t)\,\hat{e}_1 + (\cos\omega t)\,\hat{e}_2.$$

Le posizioni di P e del baricentro B del disco rispetto ad O sono

$$P - O = s\,\hat{e}_r,$$

$$B - O = s\hat{e}_r + R\,\hat{e}_\theta.$$

La velocità angolare $\vec{w}^D$ del disco si può trovare dalla formula

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{w}^D \times (B-P),$$

dove

$$\vec{v}_B = (\dot{s} - R\omega)\,\hat{e}_r + s\omega\,\hat{e}_\theta,$$

$$B - P = R\,\hat{e}_\theta,$$

e $\vec{v}_P$ è la velocità di P come punto solidale al disco, cioè

$$\vec{v}_P = \omega s\,\hat{e}_\theta.$$

Poiché possiamo scrivere $\vec{w}^D = w\hat{e}_3$, con $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$, si trova

$$w = \omega - \frac{\dot{s}}{R}.$$

L'energia cinetica del disco si ottiene subito dalla formula

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} I_{B,\hat{e}_3} |\vec{w}^D|^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{3}{2}\dot{s}^2 + \omega^2\left(\frac{3}{2}R^2 + s^2\right) - 3\omega R\dot{s}\right].$$

La posizione del centro istantaneo di rotazione del disco si trova come segue

$$C_0 - O = s\hat{e}_r + \frac{\vec{w}^D \times \vec{v}_P}{|\vec{w}^D|^2} = s\hat{e}_r + \frac{-ws}{w - \frac{\dot{s}}{R}}\hat{e}_r$$

$$= \left(\frac{s\dot{s}}{\dot{s} - \omega R}\right)\left[(\cos\omega t)\,\hat{e}_1 + (\operatorname{sen}\omega t)\,\hat{e}_2\right].$$

Secondo Esercizio

Gli assi coordinati Ox, Oy sono assi principali di inerzia, perché sono assi di simmetria per riflessione. Inoltre la direzione ortogonale al piano dell'ellisse è principale perché il piano Oxy è un piano di simmetria per riflessione.

La densità di massa dell'ellissi è

$$\sigma = \frac{m}{\pi ab}.$$

Calcoliamo i momenti principali usando le coordinate ellittiche. La matrice jacobiana della trasformazione di coordinate è

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} a\cos\theta & -ra\sin\theta \\ b\sin\theta & rb\cos\theta \end{bmatrix}$$

per cui il suo determinante è rab. Abbiamo quindi

$$I_1 = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 b^2 \sin^2\theta \; rab \; dr d\theta = \frac{1}{4}\sigma ab^3 = \frac{1}{4} m b^2,$$
$$I_2 = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 a^2 \cos^2\theta \; rab \; dr d\theta = \frac{1}{4}\sigma a^3 b = \frac{1}{4} m a^2.$$

Infine, siccome l'ellissi sta nel piano Oxy, si ha

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{4} m(a^2 + b^2).$$

Terzo Esercizio

Introduciamo le seguenti notazioni:

$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A$ è la risultante delle reazioni dell'asta OA sul corpo $\mathcal{C}$, attraverso la coppia rotoidale mobile;

$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_r$ è la risultante delle reazioni della retta r sul corpo $\mathcal{C}$;

$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_O$ è la risultante delle reazioni dell'origine del riferimento sull'asta OA attraverso la coppia rotoidale fissa.

i) Dalla prima equazione cardinale (della Statica) applicata al solo corpo $\mathcal{C}$ abbiamo

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A + \vec{\boldsymbol{\Phi}}_r - Mg\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{0}}, \tag{1}$$

da cui si ricava che

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A = \Phi_A \hat{\boldsymbol{e}}_2, \tag{2}$$

dove Φ_A è un coefficiente reale da determinarsi.

Per il principio di azione e reazione, la risultante delle reazioni di $\mathcal{C}$ sull'asta esercitate attraverso la coppia rotoidale mobile è $-\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A$. La prima equazione cardinale applicata alla sola asta si scrive quindi

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_O - mg\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \vec{\boldsymbol{\Phi}}_A = \vec{\boldsymbol{0}}, \tag{3}$$

che insieme a (2) ci dà

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_O \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{0}}.$$

Denotiamo con B il baricentro dell'asta e scriviamo adesso la seconda equazione cardinale per la sola asta rispetto al polo O:

$$(B - O) \times (-mg\hat{\boldsymbol{e}}_2) + (A - O) \times (-\vec{\boldsymbol{\Phi}}_A) = \vec{\boldsymbol{0}},$$

da cui si ottiene

$$\Phi_A = -\frac{mg}{2}.$$

Dalla (3) si ha quindi

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_O = \frac{mg}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_2.$$

ii) Usando la (1) si ottiene

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}_r = \Big(M + \frac{m}{2}\Big)g\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

e in particolare $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_r \neq \vec{\boldsymbol{0}}$. Esiste quindi l'asse centrale delle reazioni di r su $\mathcal{C}$ ed il sistema di tali reazioni è equivalente alla loro risultante $\vec{\boldsymbol{\Phi}}_r$ applicata in un punto di questo asse.

L'asse centrale ha la direzione di $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ e passa per il punto A, infatti, detto C_0 un punto dell'asse e denotando con $\vec{\boldsymbol{N}}_A^r$ il momento risultante delle reazioni di r su $\mathcal{C}$ rispetto al polo A, si ha

$$C_0 - A = \frac{\vec{\boldsymbol{\Phi}}_r \times \vec{\boldsymbol{N}}_A^r}{|\vec{\boldsymbol{\Phi}}_r|^2} = \vec{\boldsymbol{0}},$$

perché

$$\vec{\boldsymbol{N}}_A^r = \vec{\boldsymbol{0}}. \tag{4}$$

La (4) si dimostra osservando che le forze agenti su $\mathcal{C}$ diverse dalle reazioni dovute alla coppia prismatica (cioè le forze di gravità e le reazioni dovute alla coppia rotoidale mobile) sono equivalenti ad un'unica forza applicata in A. Usando la seconda equazione cardinale per il solo corpo $\mathcal{C}$ rispetto al polo A si ottiene quindi

$$\vec{\boldsymbol{N}}_A^r = \vec{\boldsymbol{0}}.$$