

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

24 Giugno 2005

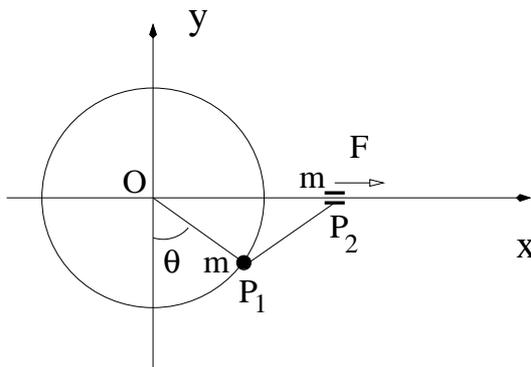
Esercizio 1: Dato il sistema dinamico continuo lineare

$$\frac{dX}{dt} = A X \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) si discuta la stabilità dell'origine per $t \rightarrow +\infty$ e per $t \rightarrow -\infty$;
b) si calcoli la soluzione particolare con condizione iniziale

$$X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema meccanico costituito da due punti materiali P_1, P_2 , di ugual massa m , vincolati a stare in un piano verticale Oxy e collegati tra loro da una sbarretta rigida di massa trascurabile e lunghezza R . Il punto P_1 è inoltre vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R centrata nell'origine O ed il punto P_2 è vincolato a muoversi sull'asse x (vedi figura). Sul sistema agisce la forza di gravità e sul solo corpo P_2 agisce una forza costante, di intensità $F > 0$, diretta nel verso dell'asse x .



- a) Utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il vettore OP_1 forma con la direzione verticale (supposto crescente in senso antiorario) si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
- b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano;
- c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio e si tracci un disegno qualitativo delle orbite.

Esercizio 3: Si consideri l'equazione ridotta del problema dei due corpi con l'aggiunta di un termine di dissipazione (radiale)

$$\ddot{r} = -\gamma\dot{r} + \frac{c^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

con γ, c^2, G, M costanti positive:

- a) scrivere la mappa standard del corrispondente sistema dinamico;
- b) trovare i punti fissi della mappa e discuterne la stabilità.