

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

3 Giugno 2005

**Esercizio 1:** Dato il sistema dinamico continuo lineare

$$\frac{dX}{dt} = A X \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5/4 \\ 0 & 3/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 5/4 \end{bmatrix}$$

- a) si discuta la stabilità dell'origine per  $t \rightarrow +\infty$  e per  $t \rightarrow -\infty$ ;
- b) si calcoli la soluzione particolare con condizione iniziale

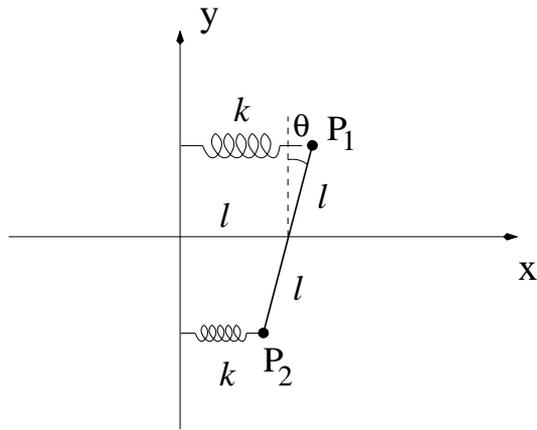
$$X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

- c) si calcoli la soluzione generale in funzione delle condizioni iniziali

$$X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} .$$

**Esercizio 2:** Si consideri il sistema meccanico costituito da due punti materiali,  $P_1$ ,  $P_2$ , di massa  $m_1$ ,  $m_2$  rispettivamente, collegati tra loro da una sbarretta rigida di massa trascurabile e lunghezza  $2\ell$ . I punti  $P_1, P_2$  sono vincolati a muoversi in un piano verticale, in cui introduciamo un sistema di riferimento  $Oxy$  ed il centro della sbarretta è vincolato a restare nel punto  $(\ell, 0)$  di tale riferimento. Su  $P_1$  e  $P_2$  agiscono due forze elastiche, di ugual costante  $k$ , con centro sull'asse  $y$  e sempre parallele all'asse  $x$  (vedi figura).

- a) Utilizzando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  che la sbarretta forma con la direzione verticale (vedi figura), si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
- b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi)  $m_1, m_2, k, \ell, g$ ;



c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione del parametro

$$J = \frac{(m_1 - m_2)g}{2k\ell},$$

si tracci il diagramma di biforcazione nel piano  $(J, \theta)$  e si faccia un disegno qualitativo delle orbite.

**Esercizio 3:** Data l'equazione alle differenze finite

$$x_{k+1} - \frac{1}{4}x_k - \frac{1}{8}x_{k-1} = 1$$

- esprimere la soluzione in funzione delle condizioni iniziali  $x_0, x_1$ ;
- discutere il comportamento delle soluzioni per  $k \rightarrow \pm\infty$ .