

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO D'ESAME

Prof. A. Milani - Dr. G.F. Gronchi

20 Gennaio 2005

**Esercizio 1:** Dato il sistema dinamico discreto lineare:

$$X_{k+1} = A X_k \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- Si trovi la forma canonica di Jordan reale della matrice  $A$ ;
- si determinino le condizioni iniziali per le quali l'orbita  $X_k$  per  $k \geq 0$  è limitata;
- si determinino le condizioni iniziali per le quali

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = \infty .$$

**Esercizio 2:** Sia dato un corpo puntiforme di massa  $m$ , vincolato a muoversi su una parabola di equazione  $z = x^2 - 1$  in un piano verticale  $(x, z)$ .

Supponiamo che il corpo sia soggetto a un'accelerazione di gravità, rivolta verso il basso, di intensità  $g$ , e alla forza di richiamo di una molla di costante elastica  $k$  con estremo libero di scorrere sull'asse  $x$ .

- Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e le equazioni di Lagrange;
- Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi)  $m, g, k$ ;
- Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e si tracci il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio nel piano  $(J, x)$  con  $J = mg/k$ .
- Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nei casi principali;
- Supponiamo adesso che il sistema venga fatto ruotare con velocità angolare costante  $\omega > 0$  attorno all'asse verticale  $z$ . Si trovino i punti di equilibrio nel sistema di riferimento ruotante e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri  $m, g, k, \omega$ .