Quarto compito di Meccanica Razionale
30 Gennaio 2023

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = -\frac{1}{5}\rho^2 + \frac{3}{4}\rho - \frac{2}{3}$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c.

ii) Calcolare il potenziale efficace e tracciare qualitativamente il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ nel caso in cui il numero di orbite circolari è minimo.

iii) Sul piano del moto $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (3, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (0, a), \qquad a \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di a affinchè l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. Si consideri una lamina $\mathcal{H}$ di massa m e densità omogenea, a forma di esagono regolare di lato ℓ. A $\mathcal{H}$ viene applicato un foro uguale ad un triangolo con vertici coincidenti a tre vertici non adiacenti dell'esagono (vedi figura), ottenendo così una lamina forata $\mathcal{H}_0$.

i) Dimostrare che qualsiasi retta passante per il baricentro e giacente nel piano della figura è un asse principale di inerzia per $\mathcal{H}_0$.

ii) Determinare i momenti principali di inerzia di $\mathcal{H}_0$ rispetto al suo baricentro.

Esercizio 3. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = x^2 - 1$, mentre un punto materiale Q, anch'esso di massa m, è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = 1 - x^2$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P e l'ascissa t del punto Q.

i) Scrivere la Lagrangiana del sistema.

ii) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.

iii) Calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad uno degli equilibri stabili.