

Quinto compito di Meccanica Razionale 20 Febbraio 2023

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$
$$f(\rho) = \frac{\rho + \alpha}{\rho^2}, \quad \alpha \neq 0$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

- i) Trovare, al variare di α e c , i valori di ρ per cui esistono orbite circolari.
- ii) Tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di α e c .
- iii) Sia $\alpha = -3$, sul piano del moto si prendano

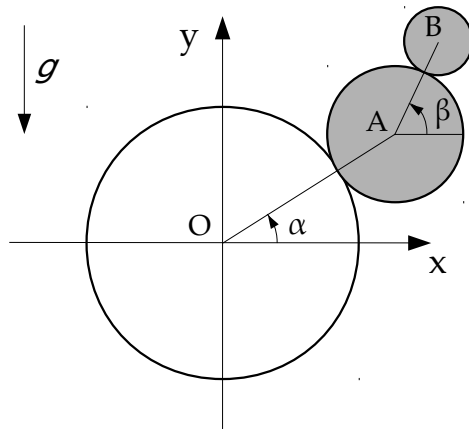
$$\mathbf{x}(0) = 2\hat{\mathbf{e}}_\rho(0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = a\hat{\mathbf{e}}_\rho(0) + b\hat{\mathbf{e}}_\theta(0), \quad a, b \in \mathbb{R};$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ è il versore radiale, mentre $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ è il versore relativo alla coordinata polare θ . Trovare tutti i valori di a e b affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Un disco omogeneo \mathcal{D}_1 di massa M , raggio $R/2$ e baricentro A rotola senza strisciare su una guida circolare centrata in O e di raggio R . Inoltre, un altro disco omogeneo \mathcal{D}_2 di massa m , raggio $R/4$ e baricentro B rotola senza strisciare sul disco \mathcal{D}_1 . Sul sistema agisce la forza di gravità di intensità $g > 0$ e rivolta verso il basso.

Si usino come coordinate l'angolo α che la direzione OA forma con la direzione orizzontale e l'angolo β che la direzione AB forma con la direzione orizzontale (si veda la figura).

- i) Calcolare le velocità angolari di \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 .
- ii) Scrivere la seconda equazione cardinale per il solo disco \mathcal{D}_2 prendendo come polo il punto di contatto tra i due dischi.



Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Due punti materiali P e Q , di massa rispettivamente m e $3m$, sono vincolati a muoversi su una circonferenza di centro O e raggio R , e sono posti agli estremi di un'asta priva di massa di lunghezza uguale a $2R$. Inoltre, un altro punto materiale T di massa m è vincolato a muoversi sulla retta di equazione $y = -R$. Sul sistema agisce la forza di gravità di intensità $g > 0$ e rivolta verso il basso, e i punti P e T sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto T e l'angolo α che la direzione OP forma con l'asse Ox (si veda la figura).

- i) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- ii) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- iii) Studiare la stabilità di tali configurazioni al variare del parametro $J = \frac{mg}{kR}$.

