# Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica

## 18 Dicembre 2019

**(usare fogli diversi per esercizi diversi)**

**Esercizio 1.** Si considerino le due funzioni hamiltoniane

$$H_1 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{q}|^2}{2}\left(1 + \frac{1}{q_1^2 q_2^2}\right), \qquad H_2 = \frac{q_1^4 + q_2^4}{q_1^2 q_2^2} + (q_1 p_2 - q_2 p_1)^2,$$

dove $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_*^2$ con $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

i) Scrivere le espressioni dei campi hamiltoniani $X_{H_1}$, $X_{H_2}$ e mostrare che i flussi corrispondenti $\Phi_1^t$, $\Phi_2^t$ commutano.

ii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per ciascuno dei sistemi hamiltoniani definiti da $H_1$ e $H_2$.

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2 - \epsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

dove $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ sono variabili azione-angolo.

i) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{\mathcal{C}_\epsilon^{-1}}{\to} (\tilde{\boldsymbol{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $\tilde{H}_\epsilon = H_\epsilon \circ \mathcal{C}_\epsilon$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in $\epsilon$. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione fino al secondo ordine in $\epsilon$ incluso.

ii) Mostrare che le variabili di azione $I_1, I_2$ compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\epsilon}$ attorno a dei valori costanti (quindi, in particolare, il sistema soddisfa il principio della media).