Compito di Meccanica Razionale

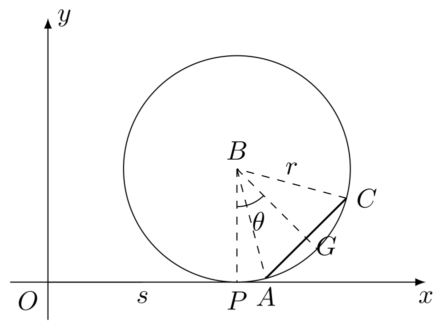
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

5 Giugno 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri un anello di raggio r, mobile in tale piano, che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox. Gli estremi A, C di un'asta di lunghezza r sono vincolati a scivolare sull'anello (vedi figura). Usando come coordinate l'ascissa s del centro B dell'anello e l'angolo θ che il segmento BG, con G il centro dell'asta, forma con la direzione verticale,



i) trovare le coordinate del centro istantaneo di rotazione dell'asta.

Assumendo che il moto dell'asta sia dato dalle relazioni

$$s(t) = rt, \qquad \theta(t) = t,$$

ii) descrivere la polare fissa (base) e la polare mobile (rulletta) dell'asta.

Secondo Esercizio

Un corpo di massa m è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$ ed

$$f(\rho) = -k(\rho + \rho^3), \qquad k > 0.$$

Assumiamo che il momento angolare sia diverso da zero.

a) mostrare che c'è un unico valore $\bar{\rho}$ della variabile ρ che corrisponde ad una traiettoria circolare.[1]

b) Tracciare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto, con coordinate $\rho, \dot{\rho}$.

c) Calcolare il periodo della traiettoria circolare in funzione del raggio $\bar{\rho}$.

[1] calcolare la derivata seconda dell'energia potenziale efficace.

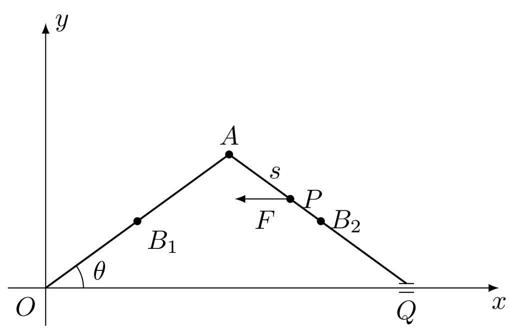
d) Calcolare il valore minimo $E_{\min}$ dell'energia totale in funzione di $\bar{\rho}$.

e) nel caso in cui l'energia totale sia uguale a $\overline{E} = k(\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4)$ mostrare che, se $\rho_{\max}$ è il valore massimo che può essere assunto dalla variabile ρ, si ha

$$\rho_{\max} < 2\bar{\rho}.$$

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee di massa m e lunghezza 2ℓ che sono incernierate in un estremo. L'altro estremo della prima asta è incernierato nell'origine O mentre quello della seconda asta, indicato con Q, può scivolare senza attrito sull'asse Ox. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Una forza costante $-F\hat{\mathbf{e}}_1$, con $F > 0$, agisce sul punto P di ascissa s della seconda asta, vedi figura. Si usi come coordinata l'angolo θ che la prima asta forma con la direzione orizzontale.



1. Calcolare la componente lagrangiana delle forze attive Q_θ e usarla per scrivere l'equazione che caratterizza le configurazioni di equilibrio del sistema.

2. In condizioni di equilibrio, calcolare il coefficiente Φ della reazione vincolare $\Phi\hat{\mathbf{e}}_2$, esercitata dall'asse Ox sull'estremo Q della seconda asta.

Soluzioni

Primo Esercizio

i) Siano $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ i versori degli assi Ox, Oy ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. La velocità angolare dell'asta è

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Usando B come punto solidale all'asta e detto C_0 il centro istantaneo di rotazione si ha

$$C_0 - B = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2}\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}_B = \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}}\hat{\mathbf{e}}_2.$$

Poiché $B - O = s\hat{\mathbf{e}}_1 + r\hat{\mathbf{e}}_2$, le coordinate di C_0 sono

$$x_{C_0} = s, \qquad y_{C_0} = r + \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}}$$

ii) Nel caso del particolare moto considerato si ha

$$x_{C_0}(t) = rt, \qquad y_{C_0}(t) = 2r,$$

per cui il centro istantaneo di rotazione si trova sempre sull'anello, in posizione antipodale al punto di contatto P con l'asse Ox. Quindi la base è data dalla retta di equazione parametrica

$$x(\lambda) = \lambda, \quad y(\lambda) = 2r, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si consideri un riferimento $Bx'y'z'$ solidale all'asta, con origine in B, l'asse Bx' parallelo al segmento AC e l'asse Bz' parallelo a $\hat{\mathbf{e}}_3$. La rulletta è data dalla circonferenza di equazione parametrica

$$x'(\lambda) = r\cos\lambda, \quad y'(\lambda) = r\sin\lambda, \qquad \lambda \in [0, 2\pi).$$

Secondo Esercizio

a) Fissato il valore $c \neq 0$ della componente del momento angolare ortogonale al piano del moto, l'energia potenziale efficace è data da

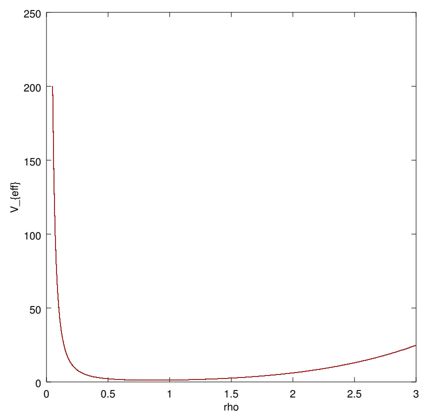
$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = k\Big(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}\Big) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

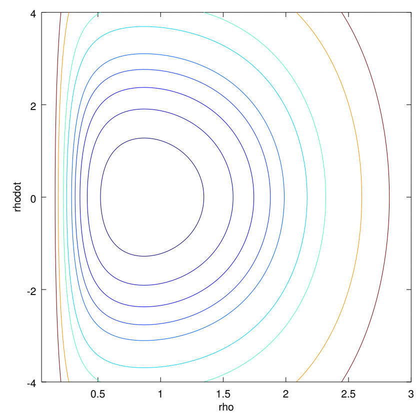
Le traiettorie circolari corrispondono ai punti stazionari di $\mathcal{V}_{\text{eff}}$. Derivando rispetto a ρ si trova

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = k(\rho + \rho^3) - \frac{c^2}{m\rho^3}$$
$$\mathcal{V}''_{\text{eff}}(\rho) = k(1 + 3\rho^2) + \frac{3c^2}{m\rho^4}$$

Poiché $\lim_{\rho\to 0^+}\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \lim_{\rho\to+\infty}\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$ e $\mathcal{V}''_{\text{eff}}(\rho) > 0$ per ogni $\rho > 0$, la funzione $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ ha un unico punto stazionario $\bar{\rho}$, che è un minimo. Infatti, sicuramente $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ ha un punto di minimo, in cui si annulla $\mathcal{V}'_{\text{eff}}$. Per il teorema di Rolle, se $\mathcal{V}'_{\text{eff}}$ si annullasse in almeno due punti, allora anche $\mathcal{V}''_{\text{eff}}$ si dovrebbe annullare in un punto intermedio.

b) Disegnamo di seguito il grafico dell'energia potenziale efficace ed il ritratto di fase:





c) Il periodo della traiettoria circolare è

$$T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} = \frac{2\pi}{|c|} m\bar{\rho}^2.$$

d) Il valore minimo dell'energia è

$$E_{\text{min}} = \mathcal{V}_{\text{eff}}(\bar{\rho}).$$

Da $\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\bar{\rho}) = 0$ si ottiene

$$k(\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4) = \frac{c^2}{m\bar{\rho}^2},$$

da cui

$$E_{\text{min}} = k\Big(\bar{\rho}^2 + \frac{3}{4}\bar{\rho}^4\Big).$$

e) Sia $\bar{E} = k(\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4)$ e siano $\rho_{\text{min}}, \rho_{\text{max}}$ i punti di inversione, soluzioni di $\bar{E} - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Le traiettorie sono confinate dalla relazione $\bar{E} - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) \geq 0$, che implica $\rho_{\text{min}} \leq \rho \leq \rho_{\text{max}}$. Osserviamo che

$$V_{\text{eff}}(2\bar{\rho}) = k(2\bar{\rho}^2 + 4\bar{\rho}^4) + \frac{c^2}{8m\bar{\rho}^2} > \bar{E},$$

quindi si ha

$$\rho_{max} < 2\bar{\rho}.$$

Terzo Esercizio

1. Siano

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \ell(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2), \qquad \boldsymbol{\chi}_2 = \ell(3\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2),$$

le coordinate dei baricentri B_1, B_2 delle due aste e siano

$$\boldsymbol{\chi}_P = (2\ell + s)\cos\theta\mathbf{e}_1 + (2\ell - s)\sin\theta\mathbf{e}_2$$

le coordinate del punto P.

Posso considerare l'azione della forza di gravità come data da due forze $-mg\mathbf{e}_2$ che agiscono su B_1 e B_2. La componente lagrangiana delle forze è

$$Q_\theta = -mg\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_1}{\partial \theta} - mg\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_2}{\partial \theta} - F\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_P}{\partial \theta} = -2mg\ell\cos\theta + (2\ell + s)F\sin\theta.$$

L'equazione che caratterizza gli equilibri è

$$Q_\theta = 0,$$

da cui si ottiene

$$\tan\theta = \frac{2mg\ell}{(2\ell + s)F}. \tag{1}$$

2. All'equilibrio, la seconda equazione cardinale per l'asta AQ rispetto al polo A si scrive

$$\vec{\mathbf{N}}_A = (P - A) \times (-F\hat{\mathbf{e}}_1) + (B_2 - A) \times (-mg\hat{\mathbf{e}}_2) + (Q - A) \times \Phi\hat{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{0}},$$

da cui

$$-sF\sin\theta - mg\ell\cos\theta + 2\ell\Phi\cos\theta = 0. \tag{2}$$

Sostituendo (1) in (2) si ottiene

$$\Phi = \frac{mg}{2}\left[\frac{2\ell + 3s}{2\ell + s}\right].$$