Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

26 Giugno 2018

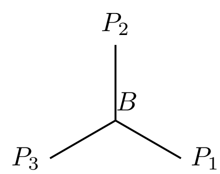
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

i) Assumiamo che Q sia un punto di un corpo rigido piano e che due rette passanti per Q e giacenti nel piano del corpo siano assi principali con lo stesso momento principale di inerzia I. Mostrare che ogni retta passante per Q e giacente nel piano del corpo è un asse principale di inerzia con momento principale I.

ii) Mostrare che se due assi principali di un corpo rigido (anche non piano) sono ortogonali, allora anche l'asse ortogonale a entrambi è principale.

Si consideri adesso il corpo rigido piano descritto in figura, formato da tre aste omogenee di lunghezza ℓ e massa m saldate tra loro in un estremo in modo tale che l'angolo compreso tra due qualunque di esse sia $\frac{2}{3}\pi$.



iii) Calcolare i momenti principali di inerzia del corpo rigido descritto in figura rispetto al suo baricentro B.[1]

iv) Trovare i momenti principali rispetto all'estremo diverso da B di una qualunque delle aste che formano il corpo (e.g. P_1).[2]

Secondo Esercizio

Un corpo di massa m è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$ ed

$$f(\rho) = A\rho - B, \qquad A, B > 0.$$

Assumiamo che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto soddisfi la relazione

$$c^2 < m(-A\bar{\rho}^4 + B\bar{\rho}^3)$$

per un certo valore $\bar{\rho} > 0$ della variabile ρ,

[1] *Suggerimento:* usare il punto i).
[2] *Suggerimento:* usare il punto ii).

a) Mostrare che ci sono due valori ρ_1, ρ_2 della variabile ρ, con $\rho_1 < \rho_2$, che corrispondono a due traiettorie circolari.[3]

b) Tracciare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto, con coordinate $\rho, \dot{\rho}$.

c) Trovare i periodi T_1, T_2 delle due traiettorie circolari.

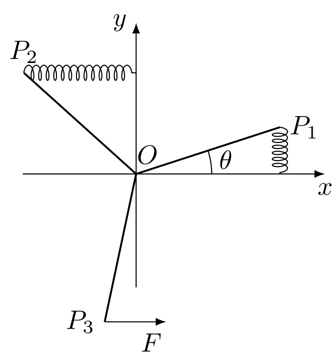
d) Nel caso in cui le condizioni iniziali per il moto unidimensionale $t \mapsto \rho(t)$ siano

$$\rho_0 = \left(\frac{3c^2}{mA}\right)^{1/4}, \qquad \dot{\rho}_0 = 0,$$

mostrare che la traiettoria è limitata.[4]

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato dal corpo rigido del primo esercizio, il cui baricentro è incernierato nell'origine O. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il punto P_1 all'asse Ox, mantenendosi sempre parallela a Oy, e un'altra molla uguale alla precedente collega il punto P_2 all'asse Oy, mantenendosi sempre parallela a Ox. Sul punto P_3 agisce una forza di intensità costante F, parallela all'asse Ox. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Si usi come coordinata l'angolo θ che l'asta OP_1 forma con l'asse Ox.



1. Calcolare la componente lagrangiana delle forze attive Q_θ e usarla per scrivere l'equazione che caratterizza le configurazioni di equilibrio del sistema.

2. Ritrovare la condizione dell'equilibrio del punto precedente tramite l'energia potenziale delle forze attive.

3. Trovare il valore di F per cui la configurazione di equilibrio sia $\theta = \frac{\pi}{6}$.

4. Per la configurazione di equilibrio del punto precedente, trovare le componenti orizzontale e verticale (Φ_1 e Φ_2) della reazione vincolare esercitata dall'origine O sul baricentro del corpo.

[3] *Osservazione:* per la regola dei segni di Cartesio il numero di tali valori di ρ non può essere superiore a due, infatti il numero di radici positive di un polinomio è al massimo uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei suoi coefficienti.

[4] *Suggerimento:* calcolare la derivata seconda dell'energia potenziale efficace.

Soluzioni

Primo Esercizio

i) Siano $\vec{\boldsymbol{\eta}}_1, \vec{\boldsymbol{\eta}}_2$ dei vettori paralleli alle due rette passanti per Q che corrispondono a due direzioni principali. Detto $\mathfrak{I}_Q$ l'operatore di inerzia si ha

$$\mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\eta}}_j = I \vec{\boldsymbol{\eta}}_j, \qquad j = 1, 2.$$

Consideriamo una qualunque combinazione lineare $\vec{\boldsymbol{\eta}} = \alpha\vec{\boldsymbol{\eta}}_1 + \alpha\vec{\boldsymbol{\eta}}_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. l'asse parallelo a $\vec{\boldsymbol{\eta}}$ e passante per Q è principale, infatti

$$\mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\eta}} = \alpha \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\eta}}_1 + \beta \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\eta}}_2 = I\alpha\vec{\boldsymbol{\eta}}_1 + I\beta\vec{\boldsymbol{\eta}}_2 = I\vec{\boldsymbol{\eta}}$$

ed il suo momento principale di inerzia è I.

ii) Siano $\vec{\boldsymbol{\eta}}_1, \vec{\boldsymbol{\eta}}_2$ dei vettori paralleli ai due assi principali, con $\vec{\boldsymbol{\eta}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\eta}}_2 = 0$. Detto $\mathfrak{I}_Q$ l' operatore di inerzia abbiamo che

$$\mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\eta}}_j = I_j \vec{\boldsymbol{\eta}}_j, \qquad j = 1, 2$$

in cui I_1, I_2 sono i momenti principali di inerzia relativi a $\vec{\boldsymbol{\eta}}_1, \vec{\boldsymbol{\eta}}_2$. Poniamo

$$\vec{\boldsymbol{\eta}}_3 = \vec{\boldsymbol{\eta}}_1 \times \vec{\boldsymbol{\eta}}_2.$$

Scegliendo come base $\{\vec{\boldsymbol{\eta}}_1, \vec{\boldsymbol{\eta}}_2, \vec{\boldsymbol{\eta}}_3\}$ e indicando con I_{ij} le componenti della matrice di inerzia in tale base abbiamo

$$I_{13} = \vec{\boldsymbol{\eta}}_1 \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\eta}}_3 = \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\eta}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\eta}}_3 = I_1 \vec{\boldsymbol{\eta}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{\eta}}_3 = 0$$

e analogamente $I_{23} = 0$.

iii) Per il punto i) un riferimento principale di inerzia rispetto al baricentro è dato da due rette ortogonali qualunque, passanti per Q e giacenti nel piano del corpo, e da una retta ortogonale a tale piano. Scelgo come versori delle direzioni principali $\hat{\mathbf{e}}_3$ ortogonale al piano del corpo, $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{P_1 - B}{|P_1 - B|}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1$. Indichiamo con I_1, I_2, I_3 i momenti principali di inerzia associati. Usando il teorema di Huygens-Steiner ed il fatto che i momenti di inerzia del corpo sono la somma degli analoghi momenti di inerzia delle singole aste che lo formano si ottiene

$$I_3 = 3\Big(\frac{m\ell^2}{12} + m\Big(\frac{\ell}{2}\Big)^2\Big) = m\ell^2.$$

Abbiamo inoltre

$$I_1 + I_2 = I_3,$$

e, per il punto i),

$$I_1 = I_2$$

infatti, per simmetria, le rette su cui giacciono le 3 aste sono assi principali per il corpo rigido, con lo stesso momento principale di inerzia. Si ottiene quindi

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{m\ell^2}{2}.$$

iv) Un riferimento principale con origine in P_1 ha direzioni principali definite dai versori $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ introdotti al punto iii). Usando il teorema di Huygens-Steiner si ottiene

$$\begin{aligned} I_1^{P_1} &= I_1 = \frac{m\ell^2}{2}, \\ I_2^{P_1} &= I_2 + (3m)\ell^2 = \frac{7}{2} m\ell^2, \\ I_3^{P_1} &= I_3 + (3m)\ell^2 = 4m\ell^2. \end{aligned}$$

Secondo Esercizio

a) L'energia potenziale efficace è

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{A}{2}\rho^2 + B\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Derivando rispetto a ρ si ottiene

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = -A\rho + B - \frac{c^2}{m\rho^3} = \frac{1}{m\rho^3}(-mA\rho^4 + mB\rho^3 - c^2),$$

che si annulla negli zeri del polinomio

$$p(\rho) = -mA\rho^4 + mB\rho^3 - c^2.$$

Osserviamo che

$$p(0) = -c^2 < 0, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} p(\rho) = -\infty.$$

Inoltre si ha

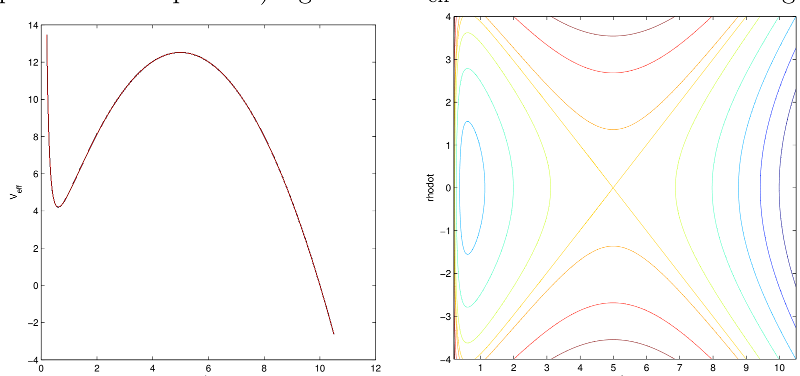
$$p(\bar{\rho}) = -mA\bar{\rho}^4 + mB\bar{\rho}^3 - c^2 > 0$$

per l'ipotesi fatta. Quindi esistono almeno 2 radici positive ρ_1, ρ_2 di $p(\rho)$. Per la regola dei segni di Cartesio queste sono tutte le radici positive di p.

b) Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{\rho\to 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to+\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = -\infty.$$

Per quanto detto al punto a) il grafico di $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ ed il ritratto di fase sono i seguenti:



c) Dalla conservazione del momento angolare si ha $c = m\rho^2\dot{\theta}$, per cui in corrispondenza dei valori ρ_1, ρ_2 dei raggi delle traiettorie circolari abbiamo due velocità angolari diverse $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$. I periodi delle due traiettorie circolari sono

$$T_1 = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}_1|} = \frac{2\pi m\rho_1^2}{|c|}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}_2|} = \frac{2\pi m\rho_2^2}{|c|}.$$

d) La derivata seconda dell'energia potenziale efficace è

$$\mathcal{V}''_{\text{eff}}(\rho) = -A + \frac{3c^2}{m\rho^4},$$

e ρ_0 corrisponde esattamente all'unico valore di $\rho > 0$ dove questa si annulla e si ha un cambiamento di convessità nel grafico di $\mathcal{V}_{\text{eff}}$. Si ha quindi

$$\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$$

ed il raggio della traiettoria della soluzione con le condizioni iniziali date soddisfa la relazione

$$\rho(t) \leq \rho_0.$$

Terzo Esercizio

1. Siano $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ i versori degli assi Ox, Oy e siano $\mathbf{e}_1 = (1,0)^T, \mathbf{e}_2 = (0,1)^T$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$. Le coordinate dei punti P_1, P_2, P_3 nella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2\}$ sono date da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}_1 &= \ell\cos\theta\mathbf{e}_1 + \ell\sin\theta\mathbf{e}_2,\\
\boldsymbol{\chi}_2 &= \ell\cos(\theta + \frac{2}{3}\pi)\mathbf{e}_1 + \ell\sin(\theta + \frac{2}{3}\pi)\mathbf{e}_2,\\
\boldsymbol{\chi}_3 &= \ell\cos(\theta + \frac{4}{3}\pi)\mathbf{e}_1 + \ell\sin(\theta + \frac{4}{3}\pi)\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

La componente lagrangiana delle forze è

$$\begin{aligned}
Q_\theta &= -k\ell\sin\theta\mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_1}{\partial\theta} - k\ell\cos(\theta + \frac{2}{3}\pi)\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_2}{\partial\theta} + F\mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_3}{\partial\theta}\\
&= -k\ell^2\Big[\sin\theta\cos\theta - \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi)\cos(\theta + \frac{2}{3}\pi)\Big] - F\ell\sin(\theta + \frac{4}{3}\pi).
\end{aligned}$$

e l'equazione che caratterizza gli equilibri è

$$Q_\theta = 0.$$

Notiamo che nel calcolo precedente non appare la forza di gravità: infatti essa si può rappresentare con un'unica forza $-3mg\mathbf{e}_2$, applicata nel baricentro del corpo, che sta fermo in O, quindi la sua posizione non dipende da θ.

2. L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V = \frac{1}{2}k\Big(\ell\sin\theta^2\Big)^2 + \frac{1}{2}k\Big(\ell\cos(\theta + \frac{2}{3}\pi)\Big)^2 - F\ell\cos(\theta + \frac{4}{3}\pi).$$

La condizione per avere equilibrio è

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = k\ell^2\Big[\sin\theta\cos\theta - \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi)\cos(\theta + \frac{2}{3}\pi)\Big] + F\ell\sin(\theta + \frac{4}{3}\pi) = 0.$$

Anche qui non appare la forza di gravità per lo stesso motivo di prima.

3. Sostituendo $\theta = \frac{\pi}{6}$ nell'equazione per gli equilibri si trova

$$F = \frac{\sqrt{3}}{2}k\ell.$$

4. Posto $\boldsymbol{\Phi} = \Phi_1\mathbf{e}_1 + \Phi_2\mathbf{e}_2$, dalla prima equazione cardinale per l'equilibrio si ottiene

$$-k\frac{\ell}{2}\mathbf{e}_2 + k\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\mathbf{e}_1 + F\mathbf{e}_1 - 3mg\mathbf{e}_2 + \Phi_1\mathbf{e}_1 + \Phi_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}.$$

Proiettando lungo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ si ottiene

$$\Phi_1 = -k\frac{\sqrt{3}}{2}\ell - F = -\sqrt{3}k\ell, \qquad \Phi_2 = k\frac{\ell}{2} + 3mg.$$