Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

15 Febbraio 2018

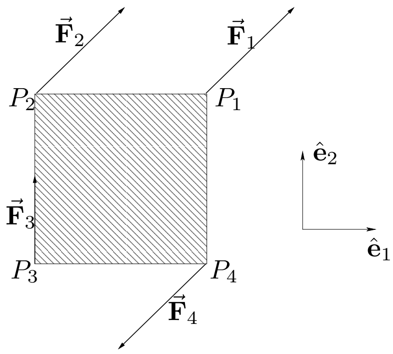
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ e si consideri una lamina quadrata, orientata come in figura, con lati di lunghezza 2ℓ e vertici P_1, P_2, P_3, P_4. Ai vertici della lamina vengono applicate le forze

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = F(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2), \quad \vec{\mathbf{F}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_1, \quad \vec{\mathbf{F}}_3 = F\hat{\mathbf{e}}_2, \quad \vec{\mathbf{F}}_4 = -\vec{\mathbf{F}}_1,$$

con $F > 0$.



i) Trovare l'asse centrale del sistema

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_j, P_j)\}_{j=1\ldots4}.$$

e dire se esso interseca la lamina.

ii) È possibile aggiungere una forza $\vec{\mathbf{F}}_5$ applicata ad un punto P_5 della lamina in modo tale che il sistema di forze applicate esteso

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{(\vec{\mathbf{F}}_j, P_j)\}_{j=1\ldots5}$$

sia equilibrato?[1]

[1] Un sistema di forze applicate si dice *equilibrato* se per tali forze la risultante e il momento risultante rispetto ad un polo qualunque sono nulli.

Secondo Esercizio

Un corpo di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$ ed

$$f(\rho) = -2\Big(\frac{\alpha}{\rho^3} + \rho\Big), \qquad \alpha > 0.$$

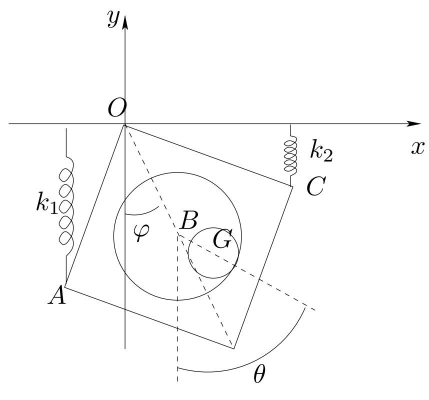
a) Tracciare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto, con coordinate $\rho, \dot\rho$, nei casi qualitativamente diversi che si presentano al variare del parametro α e della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto.

b) Dire per quali valori di α, c esistono traiettorie circolari nel piano del moto e calcolarne il periodo.

c) Nel caso in cui $\alpha = 1$, $c = 4$ si calcolino i punti di inversione del moto di ρ in funzione del valore E dell'energia totale.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri una lamina quadrata omogenea, con lati di lunghezza 2ℓ, dalla quale è stata rimossa una superficie circolare di raggio $R < \ell$ centrata nel baricentro B. La lamina forata ha massa M ed un suo estremo è incernierato nell'origine O del riferimento. All'interno del foro circolare può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di raggio $r < R$, massa m e baricentro G. I vertici A, C della lamina (vedi figura) sono collegati all'asse Ox da due molle di costanti elastiche k_1, k_2 e lunghezza a riposo nulla, che si mantengono sempre parallele a Oy. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Si usino come coordinate gli angoli φ, θ che la diagonale per O della lamina ed il segmento BG formano con la direzione verticale.



1. Calcolare i momenti principali di inerzia della lamina forata rispetto al suo baricentro B.

2. Calcolare le velocità angolari della lamina e del disco.

3. Scrivere l'energia potenziale delle forze attive agenti sul sistema.

Soluzioni

Primo Esercizio

i) La risultante delle forze è

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^{4} \vec{\mathbf{F}}_j = F(\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2) \tag{1}$$

ed il momento risultante delle forze rispetto al polo P_3 è

$$\vec{\mathbf{N}}_{P_3} = \sum_{j=1}^{4} (P_j - P_3) \times \vec{\mathbf{F}}_j = -4\ell F \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Il punto Q_0 dell'asse centrale che si trova sulla retta passante per P_3 e ortogonale ad $\vec{\mathbf{R}}$ è dato da

$$Q_0 - P_3 = \frac{\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{N}}_{P_3}}{|\vec{\mathbf{R}}|^2} = -\frac{4}{5}\ell(2\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2).$$

L'asse centrale è la retta passante per Q_0 e parallela ad $\vec{\mathbf{R}}$.

Dette x, y le coordinate cartesiane nel riferimento $P_3\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$, l'equazione dell'asse centrale si scrive

$$y - \frac{4}{5}\ell = 2(x + \frac{8}{5}\ell),$$

cioè

$$y = 2x + 4\ell. \tag{2}$$

Osservo che l'asse centrale non interseca la lamina, in quanto la funzione $y(x)$ definita da (2) è crescente e per $x = 0$, che è l'ascissa di P_2, si ha $y(0) = 4\ell > 2\ell$, che è l'ordinata di P_2.

ii) Imponiamo le condizioni per avere un sistema equilibrato:

$$\sum_{j=1}^{5} \vec{\mathbf{F}}_j = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \sum_{j=1}^{5} (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_j = \vec{\mathbf{0}}$$

per una scelta qualunque del polo $Q \in \mathbb{E}^3$. Osservo che queste si possono scrivere come

$$\vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{F}}_5 = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \vec{\mathbf{N}}_Q + (P_5 - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_5 = \vec{\mathbf{0}},$$

dove $\vec{\mathbf{R}}$ è data da (1) ed

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_{j=1}^{4} (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_j.$$

Si ottiene che

$$\vec{\mathbf{F}}_5 = -\vec{\mathbf{R}}.$$

Inoltre, i punti Q dove $\vec{\mathbf{N}}_Q = \vec{\mathbf{0}}$ sono tutti e soli i punti dell'asse centrale del sistema $\mathcal{F}$, poichè il trinomio invariante $\vec{\mathbf{N}}_Q \cdot \vec{\mathbf{R}}$ è nullo. Per cui si ha

$$(P_5 - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_5 = -(P_5 - Q) \times \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{0}}. \tag{3}$$

La relazione (3) ci dice che la forza $\vec{\mathbf{F}}_5$ deve essere applicata ad un punto P_5 dell'asse centrale del sistema $\mathcal{F}$. Abbiamo già visto nel punto i) che tale asse non interseca la lamina.

Secondo Esercizio

a) L'energia potenziale $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ è data da

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = V(\rho(\mathbf{x})), \quad V(\rho) = -\int f(\rho) d\rho = -\frac{\alpha}{\rho^2} + \rho^2.$$

Indicando con c la componente ortogonale al piano del moto del momento angolare, l'energia potenziale efficace risulta

$$V^c_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{c^2}{2\rho^2} = \rho^2 + \frac{c^2 - 2\alpha}{2\rho^2}.$$

Derivando si ottiene

$$\frac{d}{d\rho} V^c_{\text{eff}}(\rho) = \frac{2\alpha - c^2}{\rho^3} + 2\rho$$

e si vede che si presentano tre casi distinti:

- V^c_{eff} è crescente per $2\alpha - c^2 > 0$ e

$$\lim_{\rho \to 0^+} V(\rho) = -\infty.$$

- V^c_{eff} è crescente per $2\alpha - c^2 = 0$ e

$$\lim_{\rho \to 0^+} V(\rho) = 0.$$

- V^c_{eff} ha un punto di minimo in

$$\bar{\rho} = \sqrt[4]{\frac{c^2 - 2\alpha}{2}} \tag{4}$$

  se $2\alpha - c^2 < 0$.

Di conseguenza, ricordando che l'energia totale è

$$E^c_{\text{eff}}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + V^c_{\text{eff}}(\rho),$$

si hanno i tre ritratti di fase differenti illustrati nella figura.
b) Le orbite circolari corrispondono ai punti di minimo dell'energia potenziale efficace. Di conseguenza esse esistono se e solo se $2\alpha - c^2 < 0$ ed il loro raggio è dato dalla formula (4). Dalla conservazione del momento angolare si ha

$$c = \rho^2 \dot{\theta},$$

quindi la velocità angolare dell'orbita circolare è

$$\dot{\theta}_{\text{circ}} = \frac{c}{\bar{\rho}^2}$$

ed il suo periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}_{\text{circ}}|} = \frac{2\pi\bar{\rho}^2}{|c|}.$$

c) Indicando con E il valore costante dell'energia totale, i punti di inversione del moto di ρ sono definiti dalla relazione

$$E - V^c_{\text{eff}}(\rho) = 0,$$

cioè

$$E = \rho^2 + \frac{c^2 - 2\alpha}{2\rho^2}.$$

Sostituendo $\alpha = 1, c = 4$, si ottiene l'equazione

$$E = \rho^2 + \frac{7}{\rho^2},$$

che è equivalente a

$$\rho^4 - \rho^2 E + 7 = 0.$$

Da questa si ricava che

$$\rho^2 = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 28}}{2},$$

e quindi i punti di inversione sono

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{E + \sqrt{E^2 - 28}}{2}}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{E - \sqrt{E^2 - 28}}{2}}.$$

Terzo Esercizio

1. La densità di massa della lamina forata è

$$\sigma = \frac{M}{4\ell^2 - \pi R^2}.$$

Considero il riferimento principale centrato nel baricentro con gli assi $B\hat{\mathbf{e}}'_1, B\hat{\mathbf{e}}'_2$ paralleli ai lati OC, OA della lamina. Sia inoltre $B\hat{\mathbf{e}}'_3$ l'asse principale ortogonale al piano della lamina.

Calcolo il momento principale I_3 per differenza tra il momento $I_3^{\mathcal{Q}}$ di una lamina quadrata omogenea non forata ed il momento $I_3^{\mathcal{D}}$ di un disco omogeneo di raggio R corrispondente al foro. Assumo che $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{D}$ abbiano la stessa densità della lamina forata, quindi le loro masse sono

$$M^{\mathcal{Q}} = 4\ell^2\sigma = \frac{4M\ell^2}{4\ell^2 - \pi R^2}, \qquad M^{\mathcal{D}} = \pi R^2\sigma = \frac{\pi M R^2}{4\ell^2 - \pi R^2}.$$

Ottengo dunque che

$$I_3 = I_3^{\mathcal{Q}} - I_3^{\mathcal{D}} = \frac{2}{3}M^{\mathcal{Q}}\ell^2 - \frac{1}{2}M^{\mathcal{D}}R^2 = \frac{M}{4\ell^2 - \pi R^2}\Big(\frac{8}{3}\ell^4 - \frac{\pi}{2}R^4\Big).$$

Poiché il corpo è piano e il polo dei momenti di inerzia giace nel piano del corpo si ha la seguente relazione tra i momenti principali di inerzia:

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

Inoltre, per le proprietà di simmetria della lamina forata si ha $I_1 = I_2$. Concludo che

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3 = \frac{M}{4\ell^2 - \pi R^2}\Big(\frac{4}{3}\ell^4 - \frac{\pi}{4}R^4\Big).$$

2. Introduco i vettori $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ paralleli agli assi Ox, Oy ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Poiché φ è un angolo tra una direzione solidale alla lamina e una direzione fissa in $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ la velocità angolare della lamina è

$$\omega_L = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Per calcolare la velocità angolare del disco $\vec{\boldsymbol{\omega}}_D$ osservo che $\vec{\boldsymbol{\omega}}_D = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$ e determino l'espressione di ω come segue. La posizione e la velocità del baricentro B della lamina sono dati da

$$B - O = \sqrt{2}\ell(\sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_2), \qquad \vec{\mathbf{v}}_B = \sqrt{2}\ell\dot{\varphi}(\cos\varphi\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\varphi\hat{\mathbf{e}}_2).$$

Detto P il punto di contatto tra lamina e disco e detta $\vec{\mathbf{v}}_P^{\mathcal{L}}$ la velocità di P come punto della lamina, per la formula fondamentale della cinematica rigida si ha

$$\vec{\mathbf{v}}_P^{\mathcal{L}} = \vec{\mathbf{v}}_B + \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_3 \times (P - B) = \dot{\varphi}(\sqrt{2}\ell\cos\varphi + R\cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\varphi}(\sqrt{2}\ell\sin\varphi + R\sin\theta)\hat{\mathbf{e}}_2.$$

Detta $\vec{\mathbf{v}}_P^{\mathcal{D}}$ la velocità di P come punto del disco, la condizione di puro rotolamento ci dice che

$$\vec{\mathbf{v}}_P^{\mathcal{D}} = \vec{\mathbf{v}}_P^{\mathcal{L}}.$$

La posizione e la velocità del baricentro G del disco sono dati da

$$\begin{aligned} G - O &= [\sqrt{2}\ell\sin\varphi + (R - r)\sin\theta]\hat{\mathbf{e}}_1 - [\sqrt{2}\ell\cos\varphi + (R - r)\cos\theta]\hat{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\mathbf{v}}_G &= [\sqrt{2}\ell\dot{\varphi}\cos\varphi + (R - r)\dot{\theta}\cos\theta]\hat{\mathbf{e}}_1 + [\sqrt{2}\ell\dot{\varphi}\sin\varphi + (R - r)\dot{\theta}\sin\theta]\hat{\mathbf{e}}_2 \end{aligned}$$

Dalla formula fondamentale applicata ai punti P, G del disco, che si scrive

$$\vec{\mathbf{v}}_P^{\mathcal{D}} = \vec{\mathbf{v}}_G + \omega\hat{\mathbf{e}}_3 \times (P - G),$$

ottengo che

$$\omega = \frac{1}{r}[\dot{\varphi}R - \dot{\theta}(R - r)].$$

3. Le coordinate dei punti A, C sono date da

$$\begin{aligned} A - O &= 2\ell\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})\hat{\mathbf{e}}_1 - 2\ell\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})\hat{\mathbf{e}}_2 = \sqrt{2}\ell[(\sin\varphi - \cos\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 - (\cos\varphi + \sin\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2], \\ C - O &= 2\ell\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})\hat{\mathbf{e}}_1 - 2\ell\cos(\varphi + \frac{\pi}{4})\hat{\mathbf{e}}_2 = \sqrt{2}\ell[(\sin\varphi + \cos\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 - (\cos\varphi - \sin\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2]. \end{aligned}$$

L'energia potenziale è data da

$$\begin{aligned} V &= Mgy_B + mgy_G + \frac{1}{2}k_1 y_A^2 + \frac{1}{2}k_2 y_C^2 \\ &= -Mg\sqrt{2}\ell\cos\varphi - mg[\sqrt{2}\ell\cos\varphi + (R - r)\cos\theta] + (k_1 - k_2)\ell^2\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$