

Compito di Meccanica Razionale

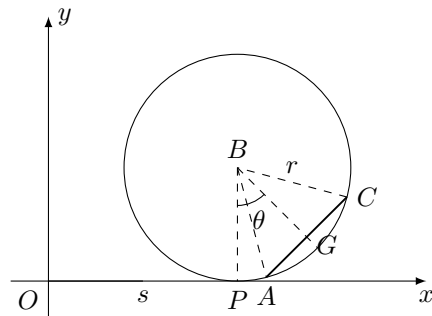
Corso di Laurea in Matematica

8 Giugno 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri un anello di raggio r , mobile in tale piano, che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox . Gli estremi A, C di un'asta di lunghezza r sono vincolati a scivolare sull'anello (vedi figura). Usando come coordinate l'ascissa s del centro B dell'anello e l'angolo θ che il segmento BG , con G il centro dell'asta, forma con la direzione verticale,



- i) trovare le coordinate del centro istantaneo di rotazione dell'asta.

Assumendo che il moto dell'asta sia dato dalle relazioni

$$s(t) = rt, \quad \theta(t) = t,$$

- ii) descrivere la polare fissa (base) e la polare mobile (rulletta) dell'asta.

Secondo Esercizio

Un corpo di massa m è soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove $\rho = |\mathbf{x}|$ ed

$$f(\rho) = -k(\rho + \rho^3), \quad k > 0.$$

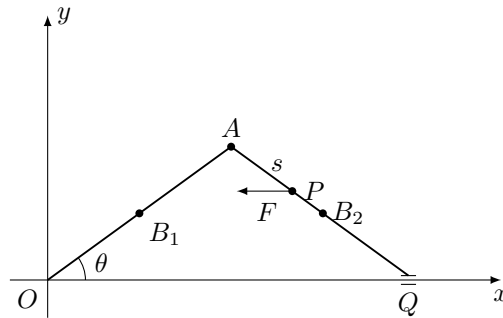
Assumiamo che il momento angolare sia diverso da zero.

- mostrare che c'è un unico valore $\bar{\rho}$ della variabile ρ che corrisponde ad una traiettoria circolare.
- Tracciare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto, con coordinate $\rho, \dot{\rho}$.
- Calcolare il periodo della traiettoria circolare in funzione del raggio $\bar{\rho}$.
- Calcolare il valore minimo E_{\min} dell'energia totale in funzione di $\bar{\rho}$.

- e) Nel caso in cui $E = k$, $c^2 = \frac{km}{2}$ mostrare che $E > E_{\min}$ e trovare i valori ρ_{\min} , ρ_{\max} dei punti di inversione del moto.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee di massa m e lunghezza 2ℓ che sono incernierate in un estremo. L'altro estremo della prima asta è incernierato nell'origine O mentre quello della seconda asta, indicato con Q , può scivolare senza attrito sull'asse Ox . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g . Una forza costante $-F\hat{e}_1$, con $F > 0$, agisce sul punto P di ascissa s della seconda asta, vedi figura. Si usi come coordinata l'angolo θ che la prima asta forma con la direzione orizzontale.



1. Calcolare la componente lagrangiana delle forze attive Q_θ e usarla per trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.
2. Studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto precedente.