Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

30 Gennaio 2018

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Sia P un punto materiale di massa m che si muove in $\mathbb{R}^3$ vincolato alla superficie di rotazione $x^2+y^2 = z^2+1$, e soggetto al campo di forze generato dall'energia potenziale $V(x, y, z) = -\frac{k^2}{z^2+1}$, con $k \in \mathbb{R}$.

i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nelle coordinate (z, θ) (due delle coordinate cilindriche), e trovare la traiettoria $\bar{\gamma}(t)$ del punto P nel caso $k > 1$ e con condizioni iniziali
$z(0) = \sqrt{k-1}$, $\dot{z}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{2}{m}}$;

ii) dire se $\bar{z}(t)$, la componente z della soluzione $\bar{\gamma}(t)$ del punto i), ha valori coniugati a $t_0 = 0$ per $t > 0$, usando la lagrangiana $\tilde{L}(z, \dot{z})$ che si ottiene eliminando la coordinata θ nelle equazioni;

iii)* dire se nel caso $k = 0$ esistono soluzioni con condizioni iniziali $z(0) > 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 1$, e tali che $z(t) \to -\infty$ per $t \to +\infty$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{16}\left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2}\right) + q_1^2 + q_2^2$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che $q_1 > 0$ e $q_2 > 0$.

i) Estendere le relazioni

$$Q_1 = q_1^2 + q_2^2\,, \qquad Q_2 = q_1^2 - q_2^2$$

ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\mathbf{\Psi}} (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

sul dominio di $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

ii) Trovare l'espressione per la funzione $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ il cui campo vettoriale hamiltoniano X_K è coniugato tramite $\mathbf{\Psi}^{-1}$ al campo hamiltoniano X_H. Usare l'espressione di $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ e di $\mathbf{\Psi}$ per trovare due integrali primi per il campo vettoriale hamiltoniano X_H.

iii) Scrivere una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$.

---

*Facoltativo.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = I_1 + I_2 + \epsilon[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

dove $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ sono variabili azione-angolo.

1. Mostrare che il sistema hamiltoniano definito da H non soddisfa il principio della media al primo ordine in ϵ.

2. Trovare una funzione non costante che dipenda solo dalle azioni e che si conservi per tutti i tempi a meno di termini di ordine $O(\epsilon)$ lungo la dinamica hamiltoniana definita da H.

3. Usando il metodo di Lie, trovare una funzione generatrice χ di una trasformazione canonica vicina all'identità che porta la hamiltoniana H in forma normale risonante, in cui, al primo ordine in ϵ, gli angoli appaiono solo attraverso una loro combinazione lineare a coefficienti interi.