Secondo compitino di Istituzioni di Fisica Matematica
19 Dicembre 2017
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Sia P un punto materiale di massa $m = 1$ che si muove su una retta. La posizione del punto è individuata dalla coordinata $q \in \mathbb{R}$ e su di esso agisce una forza conservativa con energia potenziale $V(q) = 2q^2 - q^4$.

(i) Scrivere la funzione di Hamilton $H(p, q)$ del problema e determinare i punti di equilibrio delle equazioni di Hamilton.

(ii) Usare il metodo di Hamilton-Jacobi per trovare il moto $q(t)$ del punto P con condizioni iniziali $p(0) = \sqrt{2}$, $q(0) = 0$.

(iii) Considerare il caso in cui P si muova in un piano, con coordinate (q_1, q_2), e su di esso agisca una forza conservativa con energia potenziale

$$V(q_1, q_2) = 2(q_1^2 + q_2^2) - (q_1^2 + q_2^2)^2.$$

Scrivere la funzione di Hamilton in un sistema di coordinate che renda l'equazione di Hamilton-Jacobi a variabili separabili, e trovare la funzione generatrice che la risolve in forma integrale.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\boldsymbol{\varphi}), \qquad \mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2,$$

con

$$h(\mathbf{I}) = \frac{1}{2}(I_1^2 + 2I_2^2), \qquad f(\boldsymbol{\varphi}) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

(i) Dimostrare che il campo hamiltoniano X_{H_ϵ} è integrabile trovando due integrali primi in involuzione e genericamente indipendenti.

(ii) Trovare una trasformazione canonica

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\Psi} (J_1, J_2, \psi_1, \psi_2)$$

che disaccoppia il sistema hamiltoniano del punto (i) trasformandolo in due sistemi hamiltoniani nelle variabili (J_j, ψ_j), per $j = 1, 2$. Trovare inoltre le funzioni di Hamilton per tali sistemi.

(iii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione I_1, I_2 e mostrare che vale il principio della media per tutti i tempi.