Compito di Meccanica Razionale

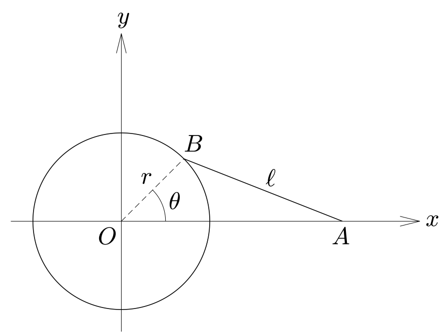
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

30 Gennaio 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in un piano un sistema di riferimento Oxy. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un disco di raggio r e da un'asta di lunghezza ℓ. Il disco può ruotare intorno al suo centro che è fissato nell'origine O del riferimento. L'estremo A dell'asta è vincolato a scorrere sull'asse Ox e l'altro estremo B è incernierato in un punto del bordo del disco.



Usando come coordinata l'angolo θ tra il segmento OB e l'asse Ox,

a) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta assumendo che $\ell > r$;

b) trovare la polare fissa (base) e la polare mobile (rulletta) descritte da C_0 nel caso in cui $\ell = r$ (assumiamo che l'estremo A dell'asta si trovi nell'origine solo quando $\theta = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$).

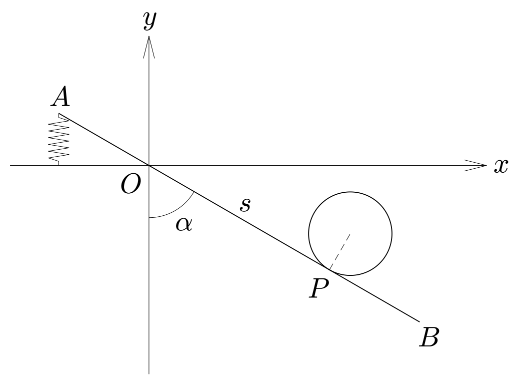
Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ e da un disco omogeneo di massa M e raggio R. L'asta è incernierata in O in modo che la distanza tra il suo estremo A ed il punto O sia $\ell/4$, il disco può rotolare senza strisciare lungo l'asta. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il punto A con l'asse Ox rimanendo verticale durante il moto. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si assuma che la cerniera in O sia un vincolo ideale.

Chiamiamo P il punto di contatto tra il disco e l'asta. Usando come coordinate l'ascissa s di P lungo l'asta e l'angolo α tra l'asta e la direzione verticale (vedi figura),

a) scrivere la lagrangiana del sistema;

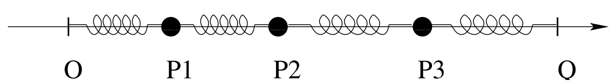
b) scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica per il disco rispetto al punto P;



c) trovare la componente perpendicolare all'asta della forza esercitata dall'asta sul disco in funzione di α, $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema meccanico formato da tre punti materiali P_1, P_2, P_3 di massa m vincolati a scorrere su una retta orizzontale r. Sui tre punti agiscono delle forze elastiche esercitate da quattro molle uguali, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Queste molle sono disposte come in figura: due di esse collegano P_i a P_{i+1} con $i = 1, 2$, le altre due collegano P_1 al punto O e P_3 al punto Q, dove O, Q sono punti fissati della retta r tali che $|Q - O| = \ell$.



Usando come coordinate lagrangiane le ascisse s_1, s_2, s_3 dei punti P_1, P_2, P_3 lungo la retta r, misurate a partire da O,

1. trovare l'unica configurazione di equilibrio del sistema e dimostrare che è stabile;
2. calcolare le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a questa configurazione.

Soluzioni

Primo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy, rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Per il teorema di Chasles il centro di istantanea rotazione C_0 dell'asta si trova nell'intersezione della retta passante per A e perpendicolare all'asse Ox con la retta passante per B ed O. Allora dalle relazioni

$$B - O = r\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + r\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2, \qquad C_0 - B = \sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\theta}(\hat{\mathbf{e}}_1 + \tan\theta\hat{\mathbf{e}}_2),$$

si ottiene

$$C_0 - O = (r\cos\theta + \sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\theta})\hat{\mathbf{e}}_1 + (r\sin\theta + \sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\theta}\tan\theta)\hat{\mathbf{e}}_2.$$

b) Nel caso in cui $\ell = r$ sempre dal teorema di Chasles si ha

$$(C_0 - O) = 2r\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + 2r\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2. \tag{1}$$

Dette (x_{C_0}, y_{C_0}) le coordinate di C_0 in Oxy, dalla (1) segue subito che la polare fissa descritta da C_0 è una circonferenza con centro nel punto O e raggio $2r$, infatti

$$x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = 4r^2.$$

Per determinare la polare mobile descritta da C_0 introduciamo un sistema di riferimento $B\hat{\mathbf{e}}_1'\hat{\mathbf{e}}_2'\hat{\mathbf{e}}_3'$ solidale all'asta, con $\hat{\mathbf{e}}_3' \equiv \hat{\mathbf{e}}_3$ ed $\hat{\mathbf{e}}_1'$ parallelo e concorde al vettore $A - B$. Associamo ad $\hat{\mathbf{e}}_1'$, $\hat{\mathbf{e}}_2'$ gli assi Bx', By', rispettivamente; si ha

$$\begin{aligned} x'_{C_0} &= r\cos(2\theta), \\ y'_{C_0} &= r\sin(2\theta). \end{aligned}$$

Queste coordinate soddisfano l'equazione

$$(x'_{C_0})^2 + (y'_{C_0})^2 = r^2.$$

La polare mobile è una circonferenza con centro nel punto B e raggio r.

Secondo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy, rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Consideriamo inoltre il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1'\hat{\mathbf{e}}_2'\hat{\mathbf{e}}_3'$, solidale all'asta con $\hat{\mathbf{e}}_1'$ parallelo e concorde a $B - O$, ed $\hat{\mathbf{e}}_3' \equiv \hat{\mathbf{e}}_3$. Scriviamo le quantità seguenti in coordinate nella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$.
La posizione e la velocità del centro di massa G_a dell'asta sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{G_a} &= \frac{\ell}{4}\mathbf{e}_1', \\ \mathbf{v}_{G_a} &= \frac{\ell}{4}\boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{e}_1' = \frac{\ell}{4}\dot{\alpha}\mathbf{e}_2', \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\alpha}\mathbf{e}_3'$ è la velocità angolare dell'asta. Per il centro di massa G_d del disco si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{G_d} &= s\mathbf{e}_1' + R\mathbf{e}_2', \\ \mathbf{v}_{G_d} &= (\dot{s} - R\dot{\alpha})\mathbf{e}_1' + s\dot{\alpha}\mathbf{e}_2'. \end{aligned}$$

La velocità angolare del disco è la somma della velocità angolare dell'asta e della velocità angolare del disco nel riferimento solidale all'asta:

$$\boldsymbol{\omega}_d = (\dot{\alpha} - \frac{\dot{s}}{R})\mathbf{e}'_3.$$

L'energia cinetica del sistema meccanico è la somma di quella dell'asta (T_a) e del disco (T_d)

$$T = T_a + T_d,$$

dove

$$\begin{aligned}
T_a &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2_{G_a} + \frac{1}{2}I_a\boldsymbol{\omega}^2_a = \frac{7}{96}m\ell^2\dot{\alpha}^2,\\
T_d &= \frac{1}{2}M\mathbf{v}^2_{G_d} + \frac{1}{2}I_d\boldsymbol{\omega}^2_d = \frac{1}{2}M(\frac{3}{2}\dot{s}^2 + \frac{3}{2}R^2\dot{\alpha}^2 + s^2\dot{\alpha}^2 - 3R\dot{s}\dot{\alpha}),
\end{aligned}$$

con

$$I_a = \frac{m\ell^2}{12}, \qquad I_d = \frac{MR^2}{2}.$$

L'energia potenziale risulta

$$V = \frac{1}{2}ky^2_A + mgy_{G_a} + Mgy_{G_d} = \frac{k\ell^2}{32}\cos^2\alpha - \frac{mg\ell}{4}\cos\alpha + Mg(R\sin\alpha - s\cos\alpha).$$

La lagrangiana è la funzione

$$L(s, \alpha, \dot{s}, \dot{\alpha}) = T(s, \dot{s}, \dot{\alpha}) - V(s, \alpha).$$

b) Scriviamo la seconda equazione cardinale per il disco prendendo come polo il punto P:

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}^{(e)}_P - M\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_{G_d}. \tag{2}$$

La posizione e la velocità di P sono

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_P &= s\mathbf{e}'_1,\\
\mathbf{v}_P &= \dot{s}\mathbf{e}'_1 + s\dot{\alpha}\mathbf{e}'_2.
\end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_{G_d} = sR\dot{\alpha}^2\mathbf{e}_3.$$

Il momento delle forze esterne risulta

$$\mathbf{N}^{(e)}_P = (\mathbf{x}_{G_d} - \mathbf{x}_P) \times (-Mg\mathbf{e}_2) = -MgR\cos\alpha\mathbf{e}_3.$$

Possiamo calcolare il momento angolare $\mathbf{M}_P$ dalla formula

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_{G_d} + (\mathbf{x}_{G_d} - \mathbf{x}_P) \times M\mathbf{v}_{G_d} = \frac{3}{2}MR(R\dot{\alpha} - \dot{s})\mathbf{e}_3,$$

dove abbiamo usato la relazione $\mathbf{M}_{G_d} = I_d\boldsymbol{\omega}_d$. In definitiva proiettando l'equazione (2) lungo $\mathbf{e}_3$ si ottiene (dopo aver diviso per MR)

$$\frac{3}{2}(R\ddot{\alpha} - \ddot{s}) = -s\dot{\alpha}^2 - g\cos\alpha. \tag{3}$$

c) Chiamiamo

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \Phi_n\mathbf{e}'_2$$

la forza esercitata dall'asta sul disco nel punto P in direzione perpendicolare all'asta. Scriviamo la seconda equazione cardinale per l'asta prendendo come polo il punto fisso O:

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O^{(e)}. \tag{4}$$

Il momento risultante delle forze esterne è

$$\mathbf{N}_O^{(e)} = \mathbf{x}_P \times (-\mathbf{\Phi}_n) + \mathbf{x}_{G_a} \times (-mg\mathbf{e}_2) + \mathbf{x}_A \times k(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_A),$$

dove $-\mathbf{\Phi}_n$ è la forza esercitata in P dal disco sull'asta in direzione perpendicolare all'asta, e

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= \frac{\ell}{4}(-\sin\alpha\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\mathbf{e}_2), \\ \mathbf{x}_Q &= -\frac{\ell}{4}\sin\alpha\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\mathbf{N}_O^{(e)} = (-s\Phi_n - \frac{mg\ell}{4}\sin\alpha + \frac{k\ell^2}{16}\sin\alpha\cos\alpha)\mathbf{e}_3.$$

Inoltre si ha

$$\mathbf{M}_O^{(e)} = (I_a + m\mathbf{x}_{G_a}^2)\boldsymbol{\omega}_a = \frac{7}{48}m\ell^2\dot{\alpha}\mathbf{e}_3.$$

Dopo aver proiettato l'equazione (4) lungo $\mathbf{e}_3$ ed esplicitato Φ_n si ottiene

$$\Phi_n = -\frac{1}{4s}\Big(\frac{7}{12}m\ell^2\ddot{\alpha} + mg\ell\sin\alpha - \frac{k\ell^2}{4}\sin\alpha\cos\alpha\Big).$$

Terzo Esercizio

a) L'energia potenziale del sistema è

$$V(s_1, s_2, s_3) = \frac{k}{2}[s_1^2 + (s_2 - s_1)^2 + (s_3 - s_2)^2 + (\ell - s_3)^2].$$

Le configurazioni di equilibrio corrispondono ai punti stazionari di V, cioè alle soluzioni di

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} = \frac{\partial V}{\partial s_2} = \frac{\partial V}{\partial s_3} = 0, \tag{5}$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s_1} &= k(2s_1 - s_2), \\ \frac{\partial V}{\partial s_2} &= k(2s_2 - s_1 - s_3), \\ \frac{\partial V}{\partial s_3} &= k(2s_3 - s_2 - \ell). \end{aligned}$$

La soluzione del sistema è $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)$ con

$$\bar{s}_1 = \frac{\ell}{4}, \quad \bar{s}_2 = \frac{\ell}{2}, \quad \bar{s}_3 = \frac{3\ell}{4}.$$

Per dimostrare che questa configurazione di equilibrio è stabile mostriamo che è un minimo stretto di V; possiamo poi concludere usando il teorema di Lagrange-Dirichlet. La matrice hessiana di V è data da

$$V'' = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si verifica che V'' è definita positiva (per ogni valore di (s_1, s_2, s_3) poichè V'' è costante) essendo i tre minori principali di guida di V'' maggiori di zero (stiamo usando il criterio di Sylvester). Si può fare tale verifica anche osservando che per ogni $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ vale la formula

$$\frac{1}{k}\mathbf{u} \cdot V''\mathbf{u} = 2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2u_1u_2 - 2u_2u_3 = u_1^2 + u_3^2 + (u_1 - u_2)^2 + (u_2 - u_3)^2.$$

b) Le frequenze proprie sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\lambda_3},$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) - \lambda A(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)) = 0$$

ed

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

è la matrice cinetica. Abbiamo quindi

$$\det(V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) - \lambda A(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)) = (2k - \lambda m)[(2k - \lambda m)^2 - 2k^2] = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{2k}{m}, \qquad \lambda_2 = (2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}, \qquad \lambda_3 = (2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}.$$

I modi normali di oscillazione sono le tre famiglie di funzioni vettoriali

$$c_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)u_1, \qquad c_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)u_2, \qquad c_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)u_3,$$

dove, per $j = 1, 2, 3$, $c_j \in \mathbb{R}^+$, $\phi_j \in S^1$ ed u_j un autovettore di $V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) - \lambda_j A(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)$. Una scelta possibile è

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$