

Compito di Meccanica Razionale

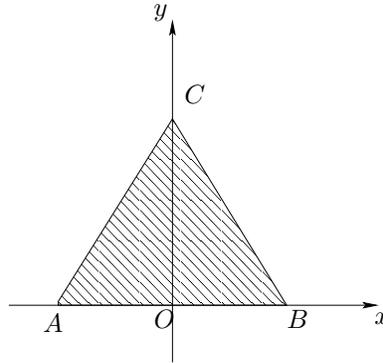
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

27 Giugno 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

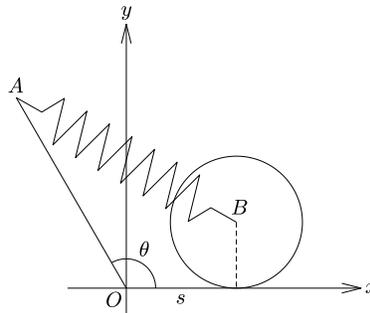
Si consideri una lamina triangolare ABC omogenea di massa m , con i lati uguali di lunghezza ℓ .



- Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con assi Ox, Oy nel piano della lamina disposti come in figura e si calcolino le coordinate (x, y) del baricentro G della lamina.
- Si calcoli il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse r_G ortogonale al piano Oxy e passante per il baricentro G .
- Si calcoli il momento di inerzia della lamina rispetto all'asse r_A parallelo all'asse Oy e passante per il vertice A .

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R , che rotola senza strisciare lungo l'asse Ox , e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ con un estremo incernierato in O . L'altro estremo A è collegato al baricentro B del disco da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g . Assumiamo che tutti i vincoli siano ideali.

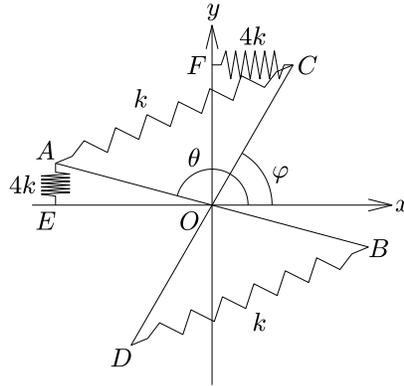


Si usino come coordinate l'ascissa s di B e l'angolo θ tra l'asta e la direzione di Ox (vedi figura). Si chiede di

- scrivere le equazioni del moto usando le equazioni cardinali della dinamica;
- ritrovare le stesse equazioni del moto con il formalismo lagrangiano;
- trovare le componenti della reazione vincolare in O lungo gli assi Ox e Oy .

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato dalle aste AB e CD omogenee di lunghezza 2ℓ e massa m vincolate a ruotare intorno ai rispettivi baricentri i quali coincidono con O . Due molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collegano A con C e B con D . Altre due molle di costante elastica $4k$ e lunghezza a riposo nulla collegano A con l'asse Ox e C con l'asse Oy , mantenendosi sempre ad essi perpendicolari. Assumiamo che tutti i vincoli siano ideali.



Per descrivere le configurazioni del sistema si usino gli angoli θ, φ formati dalle aste AB, CD con l'asse Ox (vedi figura). Si chiede di

- trovare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema;
- discutere la stabilità di una a piacere di tali configurazioni.

Soluzioni

Primo Esercizio

a) L'altezza della lamina è $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ e la sua densità di massa è

$$\sigma = \frac{2m}{\ell h} = \frac{4m}{\sqrt{3}\ell^2}.$$

Descriviamo il triangolo ABC nelle coordinate (x, y) come l'insieme

$$\tau = \tau_1 \cup \tau_2$$

dove

$$\tau_1 = \left\{ (x, y) : x \in \left[-\frac{\ell}{2}, 0\right], y = \sqrt{3}x + h \right\}, \quad \tau_2 = \left\{ (x, y) : x \in \left(0, \frac{\ell}{2}\right], y = -\sqrt{3}x + h \right\}.$$

Le coordinate (x, y) del baricentro G della lamina sono

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\sigma}{m} \int_{\tau} x dx dy = 0, \\ y_G &= \frac{\sigma}{m} \int_{\tau} y dx dy = \frac{h}{3} = \frac{\ell}{2\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

infatti, poichè $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$, per le proprietà degli integrali si ha

$$\int_{\tau} x dx dy = \int_{\tau_1} x dx dy + \int_{\tau_2} x dx dy, \quad \int_{\tau} y dx dy = \int_{\tau_1} y dx dy + \int_{\tau_2} y dx dy$$

e usando il cambiamento di coordinate $(x, y) \mapsto (-x, y)$ si trova che

$$\int_{\tau_1} x dx dy = - \int_{\tau_2} x dx dy, \quad \int_{\tau_1} y dx dy = \int_{\tau_2} y dx dy.$$

Inoltre

$$\int_{\tau_2} y dx dy = \int_0^{\ell/2} \int_0^{h-\sqrt{3}x} y dx dy = \int_0^{\ell/2} \frac{(h-\sqrt{3}x)^2}{2} dx = \frac{\ell^3}{16}.$$

b) Siano $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ i versori degli assi del riferimento $Oxyz$. Si ha

$$I_{O\hat{e}_3} = \sigma \int_{\tau} (x^2 + y^2) dx dy$$

Anche in questo caso usando il cambiamento di coordinate $(x, y) \mapsto (-x, y)$ si trova che

$$\int_{\tau_1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{\tau_2} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Inoltre

$$\int_{\tau_2} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\ell/2} \int_0^{h-\sqrt{3}x} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\sqrt{3}}{48} \ell^4,$$

per cui

$$I_{O\hat{e}_3} = 2\sigma \frac{\sqrt{3}}{48} \ell^4 = \frac{4m}{\sqrt{3}\ell^2} \frac{\sqrt{3}}{24} \ell^4 = \frac{1}{6} m \ell^2.$$

Usando il teorema di Huygens-Steiner si ottiene

$$I_{G\hat{e}_3} = I_{O\hat{e}_3} - m|G - O|^2 = \frac{1}{6}m\ell^2 - \frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{1}{12}m\ell^2$$

c) Il momento rispetto ad un asse non dipende dal polo scelto sull'asse, quindi

$$I_{G\hat{e}_2} = I_{O\hat{e}_2}.$$

Inoltre, procedendo in modo analogo a prima si trova che¹

$$\begin{aligned} I_{O\hat{e}_2} &= \sigma \int_{\tau} x^2 dx dy = 2\sigma \int_{\tau_2} x^2 dx dy = 2\sigma \int_0^{\ell/2} \int_0^{h-\sqrt{3}x} x^2 dx dy \\ &= 2\sigma \int_0^{\ell/2} x^2 (h - \sqrt{3}x) dx = \frac{1}{24}m\ell^2. \end{aligned}$$

Si conclude usando il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_{A\hat{e}_2} = I_{G\hat{e}_2} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{7}{24}m\ell^2.$$

Secondo Esercizio

Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$, con le direzioni e i versi di \hat{e}_1 ed \hat{e}_2 dati dagli assi Ox e Oy ed $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$. Scriviamo le quantità seguenti in coordinate nella base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

a) La seconda equazione cardinale per il disco rispetto al punto P di contatto con l'asse Ox :

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P^{(e)} - M\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_B. \quad (2)$$

Indicando con I_d il momento d'inerzia del disco rispetto ad una retta passante per B e diretta come \mathbf{e}_3 , e con $\boldsymbol{\omega}_d$ la velocità angolare del disco, si ha

$$\mathbf{M}_P = I_d\boldsymbol{\omega}_d + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times \mathbf{v}_B = -\frac{3}{2}MRs\mathbf{e}_3,$$

dove

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{MR^2}{2}, \\ \boldsymbol{\omega}_d &= -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_B &= s\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{x}_P &= s\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

¹Un altro modo di procedere è il seguente. Osserviamo che

$$I_{G\hat{e}_3} = I_{G\hat{e}_1} + I_{G\hat{e}_2}, \quad I_{G\hat{e}_1} = I_{G\hat{e}_2}. \quad (1)$$

La prima relazione in (1) vale perché l'oggetto considerato è piano ed il punto G si trova nel piano della lamina. La seconda segue dal fatto che tutte le rette passanti per G nel piano della lamina sono direzioni principali di inerzia. Quest'ultima affermazione si può dimostrare osservando che $G\hat{e}_2$ è un asse principale perché è un asse di simmetria per riflessione, quindi anche $G\hat{e}_1$ è un asse principale; inoltre anche l'asse passante per A e G è principale ed il vettore $A - G$ si scrive come combinazione lineare di \hat{e}_1 , \hat{e}_2 con entrambi i coefficienti non nulli. Ne segue che

$$I_{G\hat{e}_2} = \frac{I_{G\hat{e}_3}}{2} = \frac{1}{24}m\ell^2.$$

Il momento delle forze esterne è

$$\mathbf{N}_P^{(e)} = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times k(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B),$$

dove

$$\mathbf{x}_A = \ell(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2).$$

Si trova che

$$\mathbf{N}_P^{(e)} = kR(s - \ell \cos \theta) \mathbf{e}_3.$$

Notando che $\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ e proiettando la (2) lungo \mathbf{e}_3 si ha

$$\frac{3}{2}M\ddot{s} = -k(s - \ell \cos \theta). \quad (3)$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale per l'asta prendendo come polo il punto O :

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O^{(e)}. \quad (4)$$

Indicando con I_a il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad una retta passante per O e diretta come \mathbf{e}_3 , e con $\boldsymbol{\omega}_a$ la velocità angolare dell'asta, si ha

$$\mathbf{M}_O = I_a \boldsymbol{\omega}_a = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

dove

$$I_a = \frac{m\ell^2}{3},$$

$$\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

Il momento delle forze esterne è

$$\mathbf{N}_O^{(e)} = \mathbf{x}_A \times k(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) + \mathbf{x}_G \times (-mg\mathbf{e}_2) = \ell \left[\left(kR - \frac{mg}{2} \right) \cos \theta - ks \sin \theta \right] \mathbf{e}_3,$$

dove le coordinate del baricentro G dell'asta sono

$$\mathbf{x}_G = \frac{\ell}{2} (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2).$$

Proiettando la (4) lungo \mathbf{e}_3 si ha

$$\frac{m\ell}{3} \ddot{\theta} = \left(kR - \frac{mg}{2} \right) \cos \theta - ks \sin \theta. \quad (5)$$

Le equazioni del moto sono la (3) e la (5).

b) L'energia cinetica del sistema meccanico è la somma di quelle del disco (T_d) e dell'asta (T_a):

$$T = T_d + T_a,$$

dove

$$T_d = \frac{1}{2}M \|\mathbf{v}_B\|^2 + \frac{1}{2}I_d \|\boldsymbol{\omega}_d\|^2 = \frac{3}{4}M\dot{s}^2,$$

$$T_a = \frac{1}{2}I_a \|\boldsymbol{\omega}_a\|^2 = \frac{m\ell^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

L'energia potenziale risulta

$$V = \frac{1}{2}k(s^2 - 2\ell s \cos \theta - 2\ell R \sin \theta + \ell^2 + R^2) + mg\frac{\ell}{2} \sin \theta + MgR.$$

La lagrangiana è la funzione

$$L(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}) = T(\dot{s}, \dot{\theta}) - V(s, \theta).$$

Le due equazioni di Lagrange per s e θ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial s}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

corrispondono rispettivamente alle equazioni (3) e (5).

c) La prima equazione cardinale per l'asta è

$$m\mathbf{a}_G = -mg\mathbf{e}_2 + k(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) + \mathbf{\Phi}, \quad (6)$$

dove $\mathbf{\Phi} = \Phi_x\mathbf{e}_1 + \Phi_y\mathbf{e}_2$ è la reazione vincolare in O . Dopo aver proiettato la (6) lungo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ si ha

$$\begin{aligned} \Phi_x &= -k(s - \ell \cos \theta) - \frac{m\ell}{2}(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta), \\ \Phi_y &= -k(R - \ell \sin \theta) + mg + \frac{m\ell}{2}(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta). \end{aligned}$$

Terzo Esercizio

a) Le coordinate dei punti A, B, C, D sono

$$\begin{cases} x_A = \ell \cos \theta = -x_B \\ y_A = \ell \sin \theta = -y_B \end{cases} \quad \begin{cases} x_C = \ell \cos \varphi = -x_D \\ y_C = \ell \sin \varphi = -y_D \end{cases}$$

per cui l'energia potenziale delle forze esterne è

$$\begin{aligned} V(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}k[(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2] + 2k(x_C^2 + y_A^2) = \\ &= 2k\ell^2[\cos^2 \varphi + \sin^2 \theta - \cos(\theta - \varphi)] + \text{costante}. \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio sono date dai punti stazionari di V , soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\ell^2[\sin 2\theta + \sin(\theta - \varphi)] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -2k\ell^2[\sin 2\varphi + \sin(\theta - \varphi)] = 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Sommando le due equazioni si ottiene

$$\sin 2\theta = \sin 2\varphi \quad (8)$$

per cui $\theta = \varphi + h\pi$ oppure $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi + h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$.

Identificando i valori di θ che differiscono di un multiplo intero di 2π abbiamo quattro casi:

$$1) \theta = \varphi, \quad 2) \theta = \varphi + \pi, \quad 3) \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad 4) \theta = \frac{3}{2}\pi - \varphi.$$

Sostituendo sia $\theta = \varphi$ che $\theta = \varphi + \pi$ nella seconda equazione in (7) si ottiene

$$\sin 2\varphi = 0,$$

che ha le soluzioni

$$\varphi = h\frac{\pi}{2}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Sostituendo $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ nella stessa equazione si ottiene

$$\sin 2\varphi + \cos 2\varphi = 0,$$

che ha le soluzioni

$$\varphi = -\frac{\pi}{8} + h\frac{\pi}{2}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Infine, sostituendo $\theta = \frac{3}{2}\pi - \varphi$ si ottiene

$$\sin 2\varphi - \cos 2\varphi = 0,$$

con soluzioni

$$\varphi = \frac{\pi}{8} + h\frac{\pi}{2}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Nell'insieme $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ ci sono quindi 16 configurazioni di equilibrio:

$$(\theta, \varphi) = (0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), (\pi, \pi), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \text{caso 1)}$$

$$(\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), (0, \pi), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \text{caso 2)}$$

$$\left(\frac{5\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right), \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right), \left(\frac{13\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right), \left(\frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right), \quad \text{caso 3)}$$

$$\left(\frac{11\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\right), \left(\frac{15\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right). \quad \text{caso 4)}$$

b) Studiamo la stabilità dell'equilibrio $(\theta, \varphi) = (0, 0)$. A tale fine calcoliamo la matrice hessiana V'' dell'energia potenziale. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= 2k\ell^2 [2 \cos 2\theta + \cos(\theta - \varphi)], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} &= -2k\ell^2 \cos(\theta - \varphi), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= 2k\ell^2 [-2 \cos 2\varphi + \cos(\theta - \varphi)], \end{aligned}$$

da cui

$$V''(0, 0) = 2k\ell^2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Concludiamo che $\det V''(0, 0) = -4(2k\ell^2)^2 < 0$ per cui ci deve essere un autovalore negativo, quindi $(\theta, \varphi) = (0, 0)$ è instabile.