Compito di Meccanica Razionale

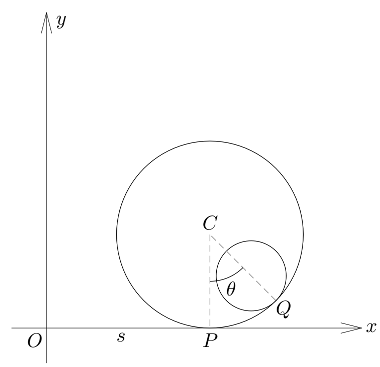
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

18 Settembre 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano si fissi un sistema di riferimento Oxy. Un disco di raggio r rotola senza strisciare all'interno di un anello di raggio $R > r$ il quale a sua volta rotola senza strisciare sull'asse Ox.



Sia C il centro dell'anello e Q il punto di contatto tra l'anello ed il disco. Usando come coordinate l'ascissa s di C e l'angolo θ tra il segmento CQ e l'asse Oy (vedi figura),

a) determinare la velocità angolare dell'anello;

b) determinare la velocità angolare del disco;

c) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 del disco.

Secondo Esercizio

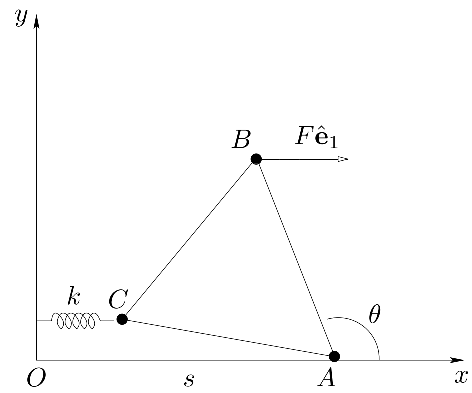
In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il moto di un corpo rigido discreto formato da tre punti materiali A, B, C di uguale massa m posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato ℓ. Il punto A può scorrere sull'asse Ox considerato un vincolo liscio. Sul punto B agisce la forza costante $F\hat{\mathbf{e}}_1$, dove $F > 0$ e $\hat{\mathbf{e}}_1$ è il versore dell'asse Ox. Il punto C è collegato all'asse Oy da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che si mantiene parallela all'asse Ox (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto A e l'angolo θ che il lato AB forma con l'asse Ox

a) trovare le coordinate dei punti A, B, C in funzione di s, θ;

b) scrivere l'energia cinetica del corpo rigido;

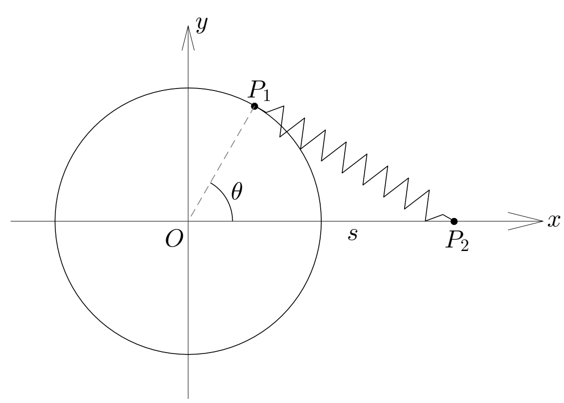
c) scrivere le componenti del vettore delle forze (attive) generalizzate $\mathbf{Q} = (Q_s, Q_\theta)$;



d) scrivere l'energia potenziale delle forze attive.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1,P_2 di massa m vincolati a scorrere senza attrito l'uno sul bordo di una guida circolare di raggio R e centro in O e l'altro lungo l'asse Ox. I punti P_1,P_2 sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



Per descrivere le configurazioni del sistema si usi l'angolo θ formato dal segmento OP_1 con l'asse Ox e l'ascissa s del punto P_2 (vedi figura).

a) Trovare le configurazioni di equilibrio del sistema;

b) discutere la stabilità di tali configurazioni al variare dei parametri m, g, k, R;

c) assumendo che $mg < kR$, calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabili.

Soluzioni

Primo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy, rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Siano

$$\mathbf{x}_P = s\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{x}_C = s\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2$$

le coordinate del punti P, C. La velocità angolare dell'anello è della forma $\boldsymbol{\omega}_a = \omega_a\hat{\mathbf{e}}_3$, $\omega_a \in \mathbb{R}$. Calcoliamo la componente ω_a con la formula fondamentale della cinematica rigida applicata ai punti P, C:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \omega_a\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_C).$$

Essendoci puro rotolamento $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ e si ottiene

$$\omega_a = -\frac{\dot{s}}{R}.$$

b) Sia G il centro di massa del disco, le coordinate dei punti Q, G sono

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_Q &= (s + R\sin\theta)\mathbf{e}_1 + (R - R\cos\theta)\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{x}_G &= [s + (R - r)\sin\theta]\mathbf{e}_1 + [R - (R - r)\cos\theta]\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

La velocità angolare del disco è della forma $\boldsymbol{\omega}_d = \omega_d\hat{\mathbf{e}}_3$, $\omega_d \in \mathbb{R}$. Calcoliamo la componente ω_d con la formula fondamentale della cinematica rigida applicata ai punti Q, G:

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_G + \omega_d\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_G).$$

Usando l'ipotesi di puro rotolamento la velocità di Q è

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \omega_a\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P) = \dot{s}(1 - \cos\theta)\mathbf{e}_1 - \dot{s}\sin\theta\mathbf{e}_2.$$

Si ottiene infine

$$\omega_d = -\frac{\dot{s}}{r} - \frac{\dot{\theta}(R - r)}{r}.$$

c) La posizione del centro istantaneo di rotazione del disco è data da

$$C_0 - O = (C_0 - Q) + (Q - O),$$

dove

$$C_0 - Q = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}}_d \times \vec{\mathbf{v}}_Q}{\omega_d^2} = -\frac{r\dot{s}}{\dot{s} + (R - r)\dot{\theta}}[\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + (1 + \cos\theta)\mathbf{e}_2].$$

Secondo Esercizio

a) Le coordinate dei punti A, B, C sono le seguenti:

$$
\begin{aligned}
&(x_A, y_A) = (s, 0),\\
&(x_B, y_B) = (s + \ell\cos\theta, \ell\sin\theta),\\
&(x_C, y_C) = \Big(s + \ell\cos(\theta + \frac{\pi}{3}), \ell\sin(\theta + \frac{\pi}{3})\Big) = \Big(s + \frac{\ell}{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta), \frac{\ell}{2}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\Big).
\end{aligned}
$$

b) L'energia cinetica del corpo rigido è data dalla somma delle energie cinetiche dei 3 punti che lo compongono. Le velocità di questi punti sono

$$
\begin{aligned}
&(\dot{x}_A, \dot{y}_A) = (\dot{s}, 0),\\
&(\dot{x}_B, \dot{y}_B) = (\dot{s} - \ell\dot{\theta}\sin\theta, \ell\dot{\theta}\cos\theta),\\
&(\dot{x}_C, \dot{y}_C) = (\dot{s} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta), \frac{\ell}{2}\dot{\theta}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)).
\end{aligned}
$$

per cui

$$
T = \frac{1}{2}m\big(3\dot{s}^2 + 2\ell^2\dot{\theta}^2 - \ell(3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\dot{s}\dot{\theta}\big).
$$

c) La mappa che ci fornisce le configurazioni del sistema in funzione delle coordinate s, θ è

$$
\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_A, \boldsymbol{\chi}_B, \boldsymbol{\chi}_C) = (x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C).
$$

Per scrivere le componenti delle forze generalizzate calcoliamo le derivate di $\boldsymbol{\chi}_A, \boldsymbol{\chi}_B, \boldsymbol{\chi}_C$ rispetto a s, θ.
Siano $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$. Troviamo che

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial s} = \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial s} = \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_C}{\partial s} = \mathbf{e}_1,\\
&\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial\theta} = \mathbf{0},\\
&\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial\theta} = -\ell\sin\theta\mathbf{e}_1 + \ell\cos\theta\mathbf{e}_2,\\
&\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_C}{\partial\theta} = \frac{\ell}{2}(-\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta)\mathbf{e}_1 + \frac{\ell}{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)\mathbf{e}_2.
\end{aligned}
$$

Inoltre le forze attive che agiscono sui punti A, B, C hanno rispettivamente coordinate

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}_A = -mg\mathbf{e}_2,\\
&\mathbf{F}_B = -mg\mathbf{e}_2 + F\mathbf{e}_1,\\
&\mathbf{F}_C = -mg\mathbf{e}_2 - k\Big(s + \frac{\ell}{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)\Big)\mathbf{e}_2.
\end{aligned}
$$

Si ottiene quindi che

$$
\begin{aligned}
Q_s &= \mathbf{F}_A \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial s} + \mathbf{F}_B \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial s} + \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_C}{\partial s}\\
&= F - k\Big(s + \frac{\ell}{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)\Big),\\
Q_\theta &= \mathbf{F}_A \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_A}{\partial\theta} + \mathbf{F}_B \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_B}{\partial\theta} + \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\chi}_C}{\partial\theta}\\
&= -F\ell\sin\theta - mg\frac{\sqrt{3}}{2}\ell(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta) + k\frac{\ell}{2}\Big(s + \frac{\ell}{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)\Big)(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta).
\end{aligned}
$$

d) L'energia potenziale delle forze attive è

$$V(s,\theta) = mg(y_B + y_C) - Fx_B + \frac{1}{2}kx_C^2$$
$$= mg\ell\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) - F(s+\ell\cos\theta) + \frac{k}{2}\Big(s + \frac{\ell}{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)\Big)^2.$$

Terzo Esercizio

a) Le coordinate dei punti P_1,P_2 sono

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\theta \\ y_1 = R\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = s \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

per cui l'energia potenziale della forza peso e della forza elastica è

$$V(\theta,s) = mgy_1 + \frac{1}{2}k[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2] = mgR\sin\theta + \frac{1}{2}k(s^2+R^2-2sR\cos\theta).$$

Le configurazioni di equilibrio sono date dai punti stazionari di V, soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = mgR\cos\theta + ksR\sin\theta = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = k(s - R\cos\theta) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Usando $s = R\sin\theta$ nella prima equazione si ottiene

$$R\cos\theta(mg + kR\sin\theta) = 0. \tag{2}$$

Se $\cos\theta = 0$ si hanno le configurazioni di equilibrio

$$(\theta,s) = (\frac{\pi}{2},0),(\frac{3\pi}{2},0).$$

Se invece $\sin\theta = -\frac{mg}{kR}$ $(mg < kR)$ si hanno le configurazioni di equilibrio

$$(\theta,s) = (-\arcsin J, R\sqrt{1-J^2}),(\arcsin J - \pi, -R\sqrt{1-J^2}),$$

dove abbiamo introdotto per comodità il parametro

$$J = \frac{mg}{kR}.$$

b) Per studiare la stabilità degli equilibri calcolo la matrice hessiana V'' dell'energia potenziale. Si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -mgR\sin\theta + ksR\cos\theta,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial s} = kR\sin\theta,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = k,$$

da cui

$$V''(\frac{\pi}{2},0) = \begin{bmatrix} -mgR & kR \\ kR & k \end{bmatrix}, \qquad V''(\frac{3\pi}{2},0) = kr\begin{bmatrix} mgR & -kR \\ -kR & k \end{bmatrix},$$

$$V''(-\arcsin J, R\sqrt{1-J^2}) = V''(\arcsin J - \pi, -R\sqrt{1-J^2}) = \begin{bmatrix} kR^2 & -mg \\ -mg & k \end{bmatrix}.$$

Concludo che

$\det V''(\frac{\pi}{2}, 0) = -kR(mg + kR) < 0$ per cui ci deve essere un autovalore negativo, quindi $(\theta, 0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ è instabile;

$\det V''(\frac{3\pi}{2}, 0) = kR(mg - kR)$ e $\mathrm{tr} V''(\frac{3\pi}{2}, 0) = mgR + k > 0$ per cui $(\theta, s) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$ è stabile se $mg > RK$ (cioè se $J > 1$) per il Teorema di Lagrange-Dirichlet; Se $J < 1$ la matrice $V''(\frac{3\pi}{2}, 0)$ ha un autovalore negativo e

$\mathrm{tr} V''(\frac{3\pi}{2}, 0) = mgR + k > 0$ per cui $(\theta, s) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$ è instabile;

$\det V''(-\arcsin J, R\sqrt{1 - J^2}) = k^2R^2 - m^2g^2$ e $\mathrm{tr} V''(-\arcsin J, R\sqrt{1 - J^2}) = kR^2 + k > 0$ per cui $(\theta, s) = (-\arcsin J, R\sqrt{1 - J^2}), (\arcsin J - \pi, -R\sqrt{1 - J^2})$ sono stabili per $J < 1$ (quando esistono sono stabili) per il Teorema di Lagrange-Dirichlet.

c) Le frequenze proprie sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2},$$

dove λ_1, λ_2 sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(V''(\bar{\theta}, \bar{s}) - \lambda A(\bar{\theta}, \bar{s})) = 0$$

ed

$$A = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

è la matrice cinetica. Abbiamo quindi

$$\det(V''(\bar{\theta}, \bar{s}) - \lambda A) = R^2(k - \lambda m)^2 - m^2g^2 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{kR + mg}{mR}, \qquad \lambda_2 = \frac{kR - mg}{mR}.$$