

Compito di Meccanica Razionale

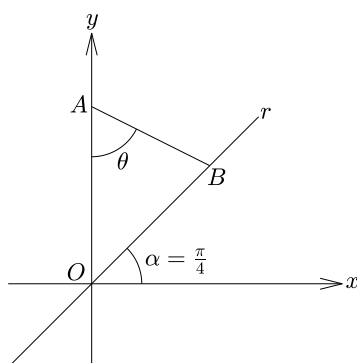
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

18 Luglio 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in un piano un sistema di riferimento Oxy . L'estremo A di un'asta di lunghezza ℓ è vincolato a scorrere sull'asse Oy e l'altro estremo B può scorrere su una guida rettilinea r passante per l'origine, che forma un angolo $\alpha = \pi/4$ con l'asse Ox .



Usando come coordinata l'angolo θ tra la direzione dell'asta e l'asse Oy (vedi figura),

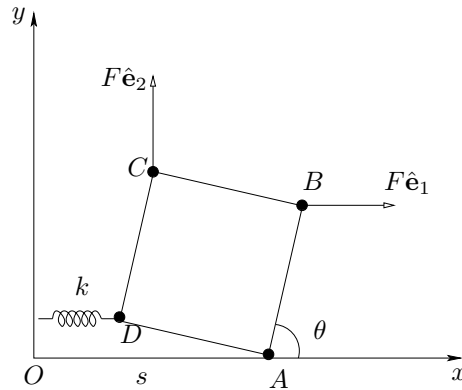
- determinare la velocità angolare dell'asta;
- calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta;
- trovare la polare fissa (base) e la polare mobile (rulletta) descritte da C_0 .

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il moto di un corpo rigido discreto formato da quattro punti materiali A, B, C, D di uguale massa m posti ai vertici di un quadrato di lato ℓ . Il punto A può scorrere sull'asse Ox considerato un vincolo liscio. Sui punti B e C agiscono rispettivamente le forze costanti $F\hat{e}_1, F\hat{e}_2$, dove $F > 0$, ed \hat{e}_1, \hat{e}_2 sono i versori degli assi Ox, Oy . Il punto D è collegato all'asse Oy da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che si mantiene parallela all'asse Ox (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g .

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto A e l'angolo θ che il lato AB forma con l'asse Ox

- trovare le coordinate dei punti A, B, C, D in funzione di s, θ ;
- scrivere l'energia cinetica del corpo rigido;

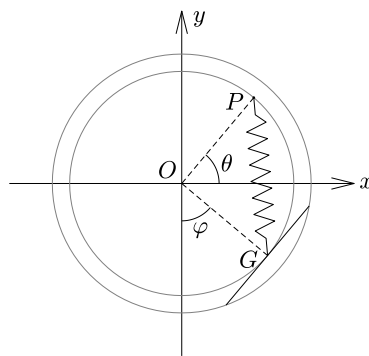


- c) scrivere le componenti del vettore delle forze (attive) generalizzate $\mathbf{Q} = (Q_s, Q_\theta)$;¹
- d) scrivere l'energia potenziale delle forze attive;
- e) verificare che valgono le relazioni

$$-\frac{\partial V}{\partial s} = Q_s, \quad -\frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta.$$

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da un punto materiale P di massa m vincolato a scorrere senza attrito sul bordo di una guida circolare di raggio r , e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza $R = \frac{2}{\sqrt{3}}r$ con gli estremi liberi di scorrere senza attrito sul bordo di una seconda guida circolare di raggio R . Entrambe le guide hanno centro in O . Il punto P e il baricentro dell'asta G sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g .



Per descrivere le configurazioni del sistema si usino gli angoli θ, φ formati dai segmenti PO, GO con le direzioni degli assi Ox, Oy rispettivamente (vedi figura).

- a) Trovare le configurazioni di equilibrio del sistema;
- b) discutere la stabilità di tali configurazioni.

¹Osserviamo che la risposta al punto i) fornisce la mappa $\mathbb{R} \times S^1 \ni \mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^8$ che definisce le posizioni dei punti A, B, C, D in funzione delle coordinate locali $\mathbf{q} = (s, \theta)$.

Soluzioni

Primo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy , rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Siano

$$\mathbf{x}_A = \ell(\cos\theta + \sin\theta)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_B = \ell \sin\theta(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

le coordinate dei punti A, B , con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ i vettori della base canonica di \mathbb{R}^3 . La velocità angolare dell'asta è della forma $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$, $\omega \in \mathbb{R}$. Calcoliamo ω con la formula fondamentale della cinematica rigida applicata ai punti A, B :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \omega\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B),$$

con

$$\mathbf{v}_A = \ell\dot{\theta}(-\sin\theta + \cos\theta)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_B = \ell\dot{\theta} \cos\theta(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

da cui si trova

$$\omega = \dot{\theta}.$$

b) La posizione del centro istantaneo di rotazione dell'asta è data da

$$C_0 - O = (C_0 - A) + (A - O),$$

dove

$$C_0 - A = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} = \ell(\sin\theta - \cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_1, \\ A - O = \ell(\cos\theta + \sin\theta)\hat{\mathbf{e}}_2,$$

per cui le coordinate del centro istantaneo di rotazione sono

$$\mathbf{x}_{C_0} = \ell(\sin\theta - \cos\theta)\mathbf{e}_1 + \ell(\sin\theta + \cos\theta)\mathbf{e}_2. \quad (1)$$

c) Dette (x_{C_0}, y_{C_0}) le coordinate di C_0 in Oxy , dalla (1) segue subito che la polare fissa descritta da C_0 è una circonferenza con centro nel punto di coordinate $(x, y) = (0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}\ell$, infatti

$$x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = 2\ell^2.$$

Per determinare la polare mobile descritta da C_0 introduciamo un sistema di riferimento $A\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ solidale all'asta, con $\hat{\mathbf{e}}'_3 \equiv \hat{\mathbf{e}}_3$ ed $\hat{\mathbf{e}}'_1$ parallelo e concorde a $(B - A)$. Siano $(x'_{C_0}, y'_{C_0}, 0)$ le coordinate di $C_0 - A$ nella base $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$. Si ha

$$x'_{C_0} = \ell(\sin\theta - \cos\theta) \sin\theta, \\ y'_{C_0} = \ell(\sin\theta - \cos\theta) \cos\theta.$$

Queste coordinate soddisfano l'equazione

$$\left(x'_{C_0} - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y'_{C_0} + \frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{2},$$

che rappresenta una circonferenza con centro nel punto di coordinate $(x', y') = (\frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2})$ e raggio $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$.

Secondo Esercizio

a) Le coordinate dei punti A, B, C, D sono le seguenti:

$$\begin{aligned}(x_A, y_A) &= (s, 0), \\(x_B, y_B) &= (s + \ell \cos \theta, \ell \sin \theta), \\(x_C, y_C) &= (s + \ell(\cos \theta - \sin \theta), \ell(\sin \theta + \cos \theta)), \\(x_D, y_D) &= (s - \ell \sin \theta, \ell \cos \theta).\end{aligned}$$

b) L'energia cinetica del corpo rigido è data dalla somma delle energie cinetiche dei 4 punti che lo compongono. Le velocità di questi punti sono

$$\begin{aligned}(\dot{x}_A, \dot{y}_A) &= (\dot{s}, 0), \\(\dot{x}_B, \dot{y}_B) &= (\dot{s} - \ell \dot{\theta} \sin \theta, \ell \dot{\theta} \cos \theta), \\(\dot{x}_C, \dot{y}_C) &= (\dot{s} - \ell \dot{\theta}(\sin \theta + \cos \theta), \ell \dot{\theta}(\cos \theta - \sin \theta)), \\(\dot{x}_D, \dot{y}_D) &= (\dot{s} - \ell \dot{\theta} \cos \theta, -\ell \dot{\theta} \sin \theta).\end{aligned}$$

per cui

$$T = 2m(\dot{s}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 - \ell(\sin \theta + \cos \theta)\dot{s}\dot{\theta}).$$

c) La mappa che ci fornisce le configurazioni del sistema in funzione delle coordinate s, θ è

$$\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_A, \boldsymbol{\chi}_B, \boldsymbol{\chi}_C, \boldsymbol{\chi}_D) = (x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D).$$

Per scrivere le componenti delle forze generalizzate calcoliamo le derivate di $\boldsymbol{\chi}_A, \boldsymbol{\chi}_B, \boldsymbol{\chi}_C, \boldsymbol{\chi}_D$ rispetto a s, θ .

Siano $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$. Troviamo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_A}{\partial s} &= \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_B}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_C}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_D}{\partial s} = \mathbf{e}_1, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_A}{\partial \theta} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_B}{\partial \theta} &= -\ell \sin \theta \mathbf{e}_1 + \ell \cos \theta \mathbf{e}_2, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_C}{\partial \theta} &= -\ell(\sin \theta + \cos \theta) \mathbf{e}_1 + \ell(\cos \theta - \sin \theta) \mathbf{e}_2, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_D}{\partial \theta} &= -\ell \cos \theta \mathbf{e}_1 - \ell \sin \theta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Inoltre le forze attive che agiscono sui punti A, B, C, D hanno rispettivamente coordinate

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_A &= -mg\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}_B &= -mg\mathbf{e}_2 + F\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{F}_C &= (-mg + F)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{F}_D &= -k(s - \ell \sin \theta)\mathbf{e}_1 - mg\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned}
Q_s &= \mathbf{F}_A \cdot \frac{\partial \chi_A}{\partial s} + \mathbf{F}_B \cdot \frac{\partial \chi_B}{\partial s} + \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial \chi_C}{\partial s} + \mathbf{F}_D \cdot \frac{\partial \chi_D}{\partial s} \\
&= (-mg\mathbf{e}_2 + F\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + (-mg + F)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + (-k(s - \ell \sin \theta)\mathbf{e}_1 - mg\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 \\
&= F - k(s - \ell \sin \theta), \\
Q_\theta &= \mathbf{F}_A \cdot \frac{\partial \chi_A}{\partial \theta} + \mathbf{F}_B \cdot \frac{\partial \chi_B}{\partial \theta} + \mathbf{F}_C \cdot \frac{\partial \chi_C}{\partial \theta} + \mathbf{F}_D \cdot \frac{\partial \chi_D}{\partial \theta} \\
&= (-mg\mathbf{e}_2 + F\mathbf{e}_1) \cdot (-\ell \sin \theta \mathbf{e}_1 + \ell \cos \theta \mathbf{e}_2) \\
&\quad + (-mg + F)\mathbf{e}_2 \cdot (-\ell(\sin \theta + \cos \theta)\mathbf{e}_1 + \ell(\cos \theta - \sin \theta)\mathbf{e}_2) \\
&\quad + (-k(s - \ell \sin \theta)\mathbf{e}_1 - mg\mathbf{e}_2) \cdot (-\ell \cos \theta \mathbf{e}_1 - \ell \sin \theta \mathbf{e}_2) \\
&= (-2mg + F)\ell \cos \theta - (2F - 2mg)\ell \sin \theta + k(s - \ell \sin \theta)\ell \cos \theta.
\end{aligned}$$

d) L'energia potenziale delle forze attive è

$$\begin{aligned}
V(s, \theta) &= mg(y_B + y_C + y_D) + \frac{1}{2}kx_D^2 - Fx_B - Fy_C \\
&= 2mg\ell(\sin \theta + \cos \theta) + \frac{1}{2}k(s - \ell \sin \theta)^2 - F(s + \ell(2 \cos \theta + \sin \theta)).
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial s} &= k(s - \ell \sin \theta) - F = -Q_s, \\
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= 2mg\ell(\cos \theta - \sin \theta) - k\ell \cos \theta(s - \ell \sin \theta) + F\ell(2 \sin \theta - \cos \theta) \\
&= (2mg - F)\ell \cos \theta + (-2mg + 2F)\ell \sin \theta - k\ell \cos \theta(s - \ell \sin \theta) = -Q_\theta.
\end{aligned}$$

Terzo Esercizio

a) Le coordinate dei punti P, G sono

$$\begin{cases} x_P = r \cos \theta \\ y_P = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x_G = R \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi = r \sin \varphi \\ y_G = -R \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi = -r \cos \varphi \end{cases}$$

per cui l'energia potenziale delle forze esterne attive è

$$V(\theta, \varphi) = mg(y_P + y_G) + \frac{1}{2}k[(x_P - x_G)^2 + (y_P - y_G)^2] = mgr(\sin \theta - \cos \varphi) - kr^2[\sin(\varphi - \theta) - 1].$$

Le configurazioni di equilibrio sono date dai punti stazionari di V , soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta} = mgr \cos \theta + kr^2 \cos(\varphi - \theta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgr \sin \varphi - kr^2 \cos(\varphi - \theta) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Sommando le due equazioni si ottiene

$$\cos \theta = -\sin \varphi \quad (3)$$

per cui $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$ oppure $\theta = -\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Sostituendo $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$ nella prima equazione in (2) si ottiene

$$-mgr \sin \varphi = 0,$$

che ha le soluzioni

$$\varphi = 0, \pi$$

in $[0, 2\pi)$. Sostituendo $\theta = -\frac{\pi}{2} - \varphi$ nella prima equazione in (2) si ottiene

$$-mgr \sin \varphi + kr^2 \cos(2\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \varphi(mgr + 2kr^2 \cos \varphi),$$

che ha sempre le soluzioni

$$\varphi = 0, \pi$$

in $[0, 2\pi)$. Inoltre se $\frac{mg}{2kr} < 1$ si hanno le ulteriori soluzioni

$$\varphi = \pm\varphi^*, \quad \varphi^* = \arccos(-\frac{mg}{2kr})$$

in $[0, 2\pi)$.

Le configurazioni di equilibrio sono sei:

$$(\theta, \varphi) = (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, \pi), (\frac{3\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{3\pi}{2} \mp \varphi^*, \pm\varphi^*).$$

b) Per studiare la stabilità degli equilibri calcolo la matrice hessiana V'' dell'energia potenziale. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= -mgr \sin \theta + kr^2 \sin(\varphi - \theta), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} &= -kr^2 \sin(\varphi - \theta), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= mgr \cos \varphi + kr^2 \sin(\varphi - \theta), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} V''(\frac{\pi}{2}, 0) &= \begin{bmatrix} -mgr - kr^2 & kr^2 \\ kr^2 & mgr - kr^2 \end{bmatrix}, & V''(\frac{3\pi}{2}, \pi) &= \begin{bmatrix} mgr - kr^2 & kr^2 \\ kr^2 & -mgr - kr^2 \end{bmatrix}, \\ V''(\frac{3\pi}{2}, 0) &= \begin{bmatrix} mgr + kr^2 & -kr^2 \\ -kr^2 & mgr + kr^2 \end{bmatrix}, & V''(\frac{\pi}{2}, \pi) &= \begin{bmatrix} -mgr + kr^2 & -kr^2 \\ -kr^2 & -mgr + kr^2 \end{bmatrix}, \\ V''(\frac{3\pi}{2} \mp \varphi^*, \pm\varphi^*) &= -kr^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \cos^2 \varphi^* - 1 \\ 2 \cos^2 \varphi^* - 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Concludo che

- $\text{tr}V''(\frac{\pi}{2}, 0) = -2kr^2 < 0$ per cui ci deve essere un autovalore negativo, quindi $(\theta, \varphi) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ è instabile;
- $\text{tr}V''(\frac{3\pi}{2}, \pi) = -2kr^2 < 0$ per cui ci deve essere un autovalore negativo, quindi $(\theta, \varphi) = (\frac{3\pi}{2}, \pi)$ è instabile;
- $\det V''(\frac{3\pi}{2}, 0) = mgr^2(mg + 2kr) > 0$ e $\text{tr}V''(\frac{3\pi}{2}, 0) = 2r(mg + kr) > 0$ per cui $(\theta, \varphi) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$ è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;

- $\det V''(\frac{\pi}{2}, \pi) = mgr^2(mg - 2kr)$ e $\text{tr}V''(\frac{\pi}{2}, \pi) = 2r(-mg + kr)$. Se $mg > kr$ allora $\text{tr}V''(\frac{\pi}{2}, \pi) < 0$, altrimenti $mg \leq kr$ e si ha $\det V''(\frac{\pi}{2}, \pi) < 0$. In ogni caso ci deve essere un autovalore negativo, quindi $(\theta, \varphi) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ è instabile;
- $\text{tr}V''(\frac{3\pi}{2} \mp \varphi^*, \pm\varphi^*) = -2kr^2 < 0$ per cui ci deve essere un autovalore negativo, quindi le configurazioni $(\theta, \varphi) = (\frac{3\pi}{2} \mp \varphi^*, \pm\varphi^*)$ sono instabili.