Compito di Meccanica Razionale

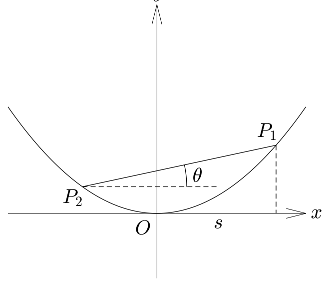
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

16 Febbraio 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

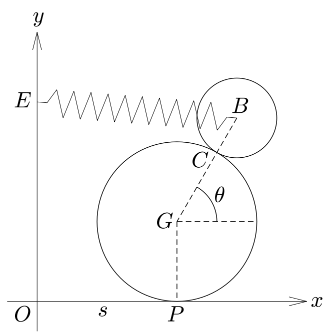
Si fissi un sistema di riferimento Oxy in un piano e si consideri il sistema meccanico formato da un'asta di lunghezza ℓ, i cui estremi P_1, P_2 sono vincolati a scorrere su una parabola di equazione $y = \frac{x^2}{2\ell}$. Si considerino come coordinate, alternative tra loro, l'ascissa s del punto P_1 e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione dell'asse Ox (vedi figura).



1. Si trovi la relazione che lega s e θ.
2. Si scriva in funzione di θ l'equazione parametrica di una retta che passa per il centro istantaneo di rotazione dell'asta.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco $\mathcal{D}_1$ omogeneo di massa M e raggio R, che rotola senza strisciare lungo l'asse Ox, e da un disco $\mathcal{D}_2$ omogeneo di massa m e raggio $R/2$, che rotola senza strisciare sul disco $\mathcal{D}_1$. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro B del disco $\mathcal{D}_2$ con il punto $E \equiv (0, 5R/2)$. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



Chiamiamo G il centro di massa del disco $\mathcal{D}_1$, P il punto di contatto tra il disco e l'asse Ox, C il punto di contatto tra i due dischi. Si usino come coordinate l'ascissa s di P e l'angolo θ tra il segmento GB e la direzione di Ox (vedi figura). Si assuma che per $s = 0$ si abbia $\theta = \pi/2$. Si chiede di

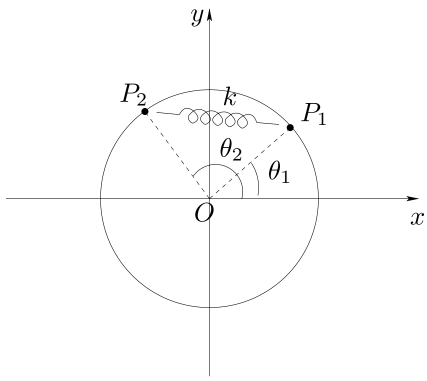
a) scrivere l'energia cinetica del disco $\mathcal{D}_2$;

b) scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica per il disco $\mathcal{D}_2$ rispetto al punto C;

c) trovare le componenti parallele agli assi Ox e Oy della reazione vincolare agente su $\mathcal{D}_1$ in P in funzione di s, θ e delle loro derivate prime e seconde.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di massa m vincolati a scorrere su una circonferenza di centro O e raggio r. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Inoltre i due punti sono collegati tra loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (vedi figura).



Usando come coordinate lagrangiane gli angoli θ_1, θ_2 che i segmenti OP_1 e OP_2 formano con la direzione dell'asse Ox determinare le condizioni sui parametri per avere almeno una configurazione di equilibrio con $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2} + j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$ e studiare la stabilità di tale configurazione.

Soluzioni

Primo Esercizio

1. Dette (x_1, y_1), (x_2, y_2) le coordinate di P_1, P_2 si ha

$$x_1 - x_2 = \ell \cos\theta, \qquad y_1 - y_2 = \ell \sin\theta.$$

Usando le relazioni

$$y = \frac{x^2}{2\ell}, \qquad x_1 = s,$$

quest si scrivono

$$s - x_2 = \ell \cos\theta, \qquad \frac{s^2 - x_2^2}{2\ell} = \ell \sin\theta.$$

Eliminando la variabile x_2 si ottiene

$$s^2 - (s - \ell\cos\theta)^2 = 2\ell^2 \sin\theta. \tag{1}$$

Osservo che $\cos\theta \neq 0$ perchè $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Semplificando la (1) e dividendo per $\cos\theta$ si ha

$$s = \frac{\ell}{2}\cos\theta + \ell\tan\theta. \tag{2}$$

2. Le coordinate (x, y) di un vettore τ_1 tangentealla parabola nel punto P_1 sono $(1, s/\ell)$, ed un vettore ortogonale a τ_1 ha coordinate $(-s/\ell, 1)$. Per il teorema di Chasles, l'equazione parametrica di una retta che passa per il centro istantaneo di rotazione dell'asta è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{s^2}{2\ell} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{s}{\ell} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

con parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Tale equazione è data in funzione di s. Per ottenerla in funzione di θ basta sostituire (2) in (3).

Secondo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy, rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Scriviamo le quantità seguenti in coordinate nella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$.
Ci servono le posizioni dei punti P, C, B:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_P &= s\mathbf{e}_1, \\
\mathbf{x}_C &= (s + R\cos\theta)\mathbf{e}_1 + R(1 + \sin\theta)\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{x}_B &= (s + \frac{3}{2}R\cos\theta)\mathbf{e}_1 + R(1 + \frac{3}{2}\sin\theta)\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

La velocità del punto C solidale al disco $\mathcal{D}_1$ è

$$\mathbf{v}_C^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_P) = \dot{s}[(1 + \sin\theta)\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2],$$

dove $\boldsymbol{\omega}_1 = -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_3$ è la velocità angolare di $\mathcal{D}_1$. La condizione di puro rotolamento ci dà

$$\mathbf{v}_C^{(2)} = \mathbf{v}_C^{(1)}$$

dove $\mathbf{v}_C^{(2)}$ è la velocità di C come punto del disco $\mathcal{D}_2$. Quindi, sapendo che la velocità angolare di $\mathcal{D}_2$ è della forma $\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2\mathbf{e}_3$, possiamo calcolarla dalla formula

$$\mathbf{v}_C^{(2)} = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C),$$

dove

$$\mathbf{v}_B = (\dot{s} - \frac{3}{2}R\dot{\theta}\sin\theta)\mathbf{e}_1 + \frac{3}{2}R\dot{\theta}\cos\theta\mathbf{e}_2.$$

Si ricava che

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \Big(3\dot{\theta} + \frac{2\dot{s}}{R}\Big)\mathbf{e}_3.$$

Usando il teorema di König l'energia cinetica del disco $\mathcal{D}_2$ si scrive

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}I_3|\boldsymbol{\omega}_2|^2 = \frac{3}{4}m\Big[\dot{s}^2 + \frac{9}{4}R^2\dot{\theta}^2 - \dot{s}\dot{\theta}R(2\sin\theta - 1)\Big],$$

dove $I_3 = \frac{mR^2}{8}$ è il momento principale di inerzia di $\mathcal{D}_2$ rispetto all'asse $B\hat{\mathbf{e}}_3$.
b) Scriviamo la seconda equazione cardinale per il disco $\mathcal{D}_2$ prendendo come polo il punto C:

$$\dot{\mathbf{M}}_C = \mathbf{N}_C^{(e)} - m\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_B. \tag{4}$$

La velocità del polo C è

$$\mathbf{v}_C = (\dot{s} - R\dot{\theta}\sin\theta)\mathbf{e}_1 + R\dot{\theta}\cos\theta\mathbf{e}_2.$$

Otteniamo dunque

$$\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_B = \frac{R}{2}\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta\mathbf{e}_3.$$

Il momento risultante delle forze esterne è

$$\mathbf{N}_C^{(e)} = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times [-mg\mathbf{e}_2 + k(\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_B)],$$

ed essendo

$$\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_B = -(s + \frac{3}{2}R\cos\theta)\mathbf{e}_1 + \frac{3}{2}R(1 - \sin\theta)\mathbf{e}_2$$

si ha

$$\mathbf{N}_C^{(e)} = \frac{R}{2}\Big[(\frac{3}{2}Rk - mg)\cos\theta + ks\sin\theta\Big]\mathbf{e}_3.$$

Possiamo calcolare il momento angolare $\mathbf{M}_C$ dalla formula

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C) \times m\mathbf{v}_B = \frac{mR}{2}\Big[\frac{9}{4}R\dot{\theta} + (\frac{1}{2} - \sin\theta)\dot{s}\Big]\mathbf{e}_3,$$

dove abbiamo usato la relazione $\mathbf{M}_B = I_3\boldsymbol{\omega}_2$. In definitiva proiettando l'equazione (4) lungo $\mathbf{e}_3$ si ottiene (dopo aver diviso per $\frac{mR}{2}$)

$$\frac{9}{4}R\ddot{\theta} + \Big(\frac{1}{2} - \sin\theta\Big)\ddot{s} = -g\cos\theta + \frac{k}{m}\Big(\frac{3}{2}R\cos\theta + s\sin\theta\Big). \tag{5}$$

c) La prima equazione cardinale della dinamica per l'intero sistema si scrive

$$M\mathbf{a}_G + m\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\Phi}_P - (M + m)g\mathbf{e}_2 + k(\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_B), \tag{6}$$

dove $\mathbf{a}_G$, $\mathbf{a}_B$ sono le accelerazioni dei punti G, B, rispettivamente, e $\boldsymbol{\Phi}_P = \Phi_x\mathbf{e}_1 + \Phi_y\mathbf{e}_2$ è la reazione vincolare agente sul disco $\mathcal{D}_1$ in P. Proiettando (6) lungo gli assi Ox e Oy si scrivono le componenti della reazione vincolare come segue:

$$\Phi_x = (M+m)\ddot{s} + ks - \frac{3}{2}R\Big[m\ddot{\theta}\sin\theta + (m\dot{\theta}^2 - k)\cos\theta\Big],$$
$$\Phi_y = (M+m)g + \frac{3}{2}R\Big[m(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + k(\sin\theta - 1)\Big].$$

Terzo Esercizio

L'energia potenziale del sistema è

$$V(\theta_1,\theta_2) = -kr^2\cos(\theta_1-\theta_2) + mgr(\sin\theta_1 + \sin\theta_2).$$

Le configurazioni di equilibrio sono dati dai punti stazionari di V, soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial\theta_1} &= kr^2\sin(\theta_1-\theta_2) + mgr\cos\theta_1 = 0,\\ \frac{\partial V}{\partial\theta_2} &= -kr^2\sin(\theta_1-\theta_2) + mgr\cos\theta_2 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Sommando le due equazioni si ottiene

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 0,$$

per cui

$$\theta_2 = \pi \pm \theta_1.$$

Sostituendo $\cos\theta_2 = -\cos\theta_1$ nella prima equazione in (7) si ottiene

$$[-kr^2(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) + mgr]\cos\theta_1 = 0.$$

Abbiamo quindi sempre i quattro equilibri

$$(\theta_1,\theta_2) = \Big(\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{2}\Big).$$

Se $\theta_2 = \pi + \theta_1$ si ha $\sin\theta_2 = -\sin\theta_1$ e non si ottengono altri equilibri. Se $\theta_2 = \pi - \theta_1$ si ha $\sin\theta_2 = \sin\theta_1$. In questo caso, introducendo il parametro

$$J = \frac{mg}{2kr},$$

si osserva che se $J < 1$ ci sono altri due equilibri:

$$(\theta_1,\theta_2) = (\arcsin J, \pi - \arcsin J),\ (\pi - \arcsin J, \arcsin J). \tag{8}$$

Per questi equilibri la componente θ_1 è sempre diversa da $\pi/2 + j\pi, j\in\mathbb{Z}$, quindi la condizione sui parametri richiesta è

$$\frac{mg}{2kr} < 1.$$

Per studiare la stabilità calcoliamo la matrice hessiana V'' di V nelle configurazioni definite in (8). Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_1^2} &= kr^2\cos(\theta_1-\theta_2) - mgr\sin\theta_1,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_2\partial\theta_1} &= -kr^2\cos(\theta_1-\theta_2),\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_2^2} &= kr^2\cos(\theta_1-\theta_2) - mgr\sin\theta_2, \end{aligned}$$

per cui

$$H = V''(\arcsin J, \pi - \arcsin J) = V''(\pi - \arcsin J, \arcsin J) = kr^2 \begin{bmatrix} -1 & 1-2J^2 \\ 1-2J^2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Concludo che i due equilibri sono instabili in quanto

$$\mathrm{tr} H = -2 < 0,$$

per cui H deve avere almeno un autovalore negativo.