Compito di Meccanica Razionale

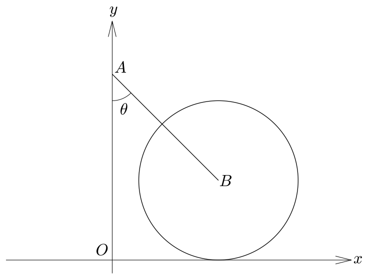
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

10 Gennaio 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si consideri il sistema di riferimento Oxy. L'estremo A di un'asta di lunghezza ℓ è vincolato a scorrere sull'asse Oy e l'altro estremo B è incernierato nel centro di un disco di raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse Ox.



Usando come coordinata l'angolo θ tra l'asta e la direzione di Oy (vedi figura),

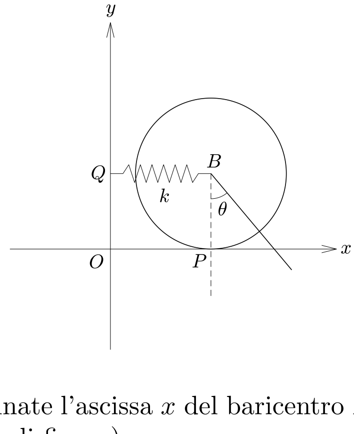
a) determinare la velocità angolare del disco;

b) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta;

c) trovare la polare fissa (base) e la polare mobile (rulletta) descritte da C_0.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse Ox e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ con un estremo incernierato nel baricentro B del disco. Una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega B con il punto $Q \equiv (0, R)$. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



Usando come coordinate l'ascissa x del baricentro B e l'angolo θ tra l'asta e la direzione verticale (vedi figura),

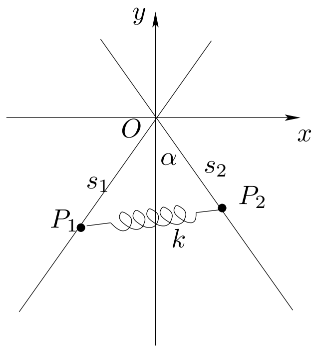
a) scrivere le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali della dinamica;

b) ritrovare le equazioni del punto a) con la formulazione lagrangiana;

c) determinare la componente orizzontale della reazione vincolare che agisce sul disco in P.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di ugual massa m vincolati a scorrere su due guide rettilinee di equazioni $x = \pm y \tan\alpha$, con $0 < \alpha < \pi/2$ (vedi figura). I due punti sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla e sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



Usando come coordinate lagrangiane le ascisse s_1, s_2 dei punti P_1, P_2 sulle due guide,

1. trovare le coordinate dell'unica configurazione di equilibrio del sistema e mostrare che questa è stabile;

2. calcolare le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a questa configurazione.

Soluzioni

Primo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy, rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Sia x_B la coordinata x del punto B. La velocità angolare del disco si scrive come

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_d = -\frac{\dot{x}_B}{R}\hat{\mathbf{e}}_3.$$

La relazione tra x_B e l'angolo θ è data da

$$x_B = \ell \sin\theta.$$

Si ha allora

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_d = -\frac{\ell\cos\theta}{R}\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3.$$

b) La posizione del centro istantaneo di rotazione dell'asta è data da

$$C_0 - O = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}}_a \times \vec{\mathbf{v}}_O}{\left\|\vec{\boldsymbol{\omega}}_a\right\|^2},$$

in cui

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_a = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3$$

è la velocità angolare dell'asta. La velocità del punto O (solidale all'asta) si calcola dalla formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi

$$\vec{\mathbf{v}}_O = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\boldsymbol{\omega}}_a \times (O - A) = \dot{\theta}[(R + \ell\cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_1 - \ell\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2],$$

con

$$\begin{aligned}(O - A) &= -(R + \ell\cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_2,\\ \vec{\mathbf{v}}_A &= -\ell\dot{\theta}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2.\end{aligned}$$

Si ottiene

$$(C_0 - O) = \ell\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + (R + \ell\cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_2. \tag{1}$$

In alternativa si può usare il teorema di Chasles, dal quale il risultato segue immediatamente.

c) Dette (x_{C_0}, y_{C_0}) le coordinate di C_0 in Oxy, dalla (1) segue subito che la polare fissa descritta da C_0 è una circonferenza con centro nel punto di coordinate $(x, y) = (0, R)$ e raggio ℓ, infatti

$$x_{C_0}^2 + (y_{C_0} - R)^2 = \ell^2.$$

Per determinare la polare mobile descritta da C_0 introduciamo un sistema di riferimento $A\hat{\mathbf{e}}_1'\hat{\mathbf{e}}_2'\hat{\mathbf{e}}_3'$ solidale all'asta, con $\hat{\mathbf{e}}_3' \equiv \hat{\mathbf{e}}_3$ ed $\hat{\mathbf{e}}_1'$ parallelo e concorde a $(B - A)$. Associamo ad $\hat{\mathbf{e}}_1'$, $\hat{\mathbf{e}}_2'$ gli assi Ax', Ay', rispettivamente; si ha

$$\begin{aligned}x'_{C_0} &= \ell\sin^2\theta,\\ y'_{C_0} &= \ell\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

Queste coordinate soddisfano l'equazione

$$\left(x'_{C_0} - \frac{\ell}{2}\right)^2 + (y'_{C_0})^2 = \frac{\ell^2}{4},$$

che rappresenta una circonferenza con centro nel punto di coordinate $(x', y') = (\frac{\ell}{2}, 0)$ e raggio $\frac{\ell}{2}$.
In alternativa si può giungere alla stessa conclusione per via puramente geometrica, notando che l'angolo $\widehat{ABC}$ si mantiene sempre retto durante il moto.

Secondo Esercizio

a) e c) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy, rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Scriviamo le quantità seguenti in coordinate nella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$. La prima equazione cardinale per il sistema formato dal disco e dall'asta è

$$M\ddot{\mathbf{x}}_B + m\ddot{\mathbf{x}}_G = -(M+m)g\mathbf{e}_2 - k\mathbf{x}_B + \mathbf{\Phi}_P, \tag{2}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_B &= x\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{x}_G &= (x + \frac{\ell}{2}\sin\theta)\mathbf{e}_1 + (R - \frac{\ell}{2}\cos\theta)\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

sono le posizioni dei baricentri B del disco e G dell'asta.
Le accelerazioni si scrivono

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{x}}_B &= \ddot{x}\mathbf{e}_1, \\
\ddot{\mathbf{x}}_G &= (\ddot{x} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta + \frac{\ell}{2}\ddot{\theta}\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{\ell}{2}\ddot{\theta}\sin\theta)\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Proiettando l'equazione (2) lungo $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ si ottiene

$$\begin{aligned}
&(M+m)\ddot{x} + m\frac{\ell}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -kx + \Phi_{P,x}, \qquad (3)\\
&m\frac{\ell}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = -(M+m)g + \Phi_{P,y}.
\end{aligned}$$

Scriviamo ora la seconda equazione cardinale per il disco prendendo come polo il punto B:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = \mathbf{N}_B^{(e)}.$$

Indicando con I_d il momento d'inerzia del disco rispetto ad una retta passante per B e diretta come $\mathbf{e}_3$, e con $\boldsymbol{\omega}_d$ la velocità angolare del disco, si ha

$$\mathbf{M}_B = I_d\boldsymbol{\omega}_d = -\frac{MR}{2}\dot{x}\mathbf{e}_3.$$

Il momento delle forze esterne è dato da

$$\mathbf{N}_B^{(e)} = (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{\Phi}_P = R\Phi_{P,x}\mathbf{e}_3.$$

Si trova dunque che

$$\Phi_{P,x} = -\frac{M}{2}\ddot{x}. \tag{4}$$

Sostuendo l'espressione per $\Phi_{P,x}$ nell'equazione (3) si ha

$$(\frac{3}{2}M + m)\ddot{x} + m\frac{\ell}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -kx. \tag{5}$$

Ora scriviamo la seconda equazione cardinale per l'asta prendendo come polo il punto B:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = \mathbf{N}_B^{(e)} - m\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_G. \tag{6}$$

Le velocità risultano

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_B &= \dot{x}\mathbf{e}_1,\\
\mathbf{v}_G &= (\dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{e}_1 + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{e}_2,
\end{aligned}$$

inoltre si vede che

$$(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_B) = \frac{\ell}{2}(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2.$$

Determiniamo il momento delle forze esterne

$$\mathbf{N}_B^{(e)} = (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_B) \times (-mg)\mathbf{e}_2 = -\frac{\ell}{2}mg\sin\theta\mathbf{e}_3.$$

Il momento angolare è

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_G + m(G-B) \times \mathbf{v}_G = m\ell(\frac{\ell}{3}\dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{x}\cos\theta)\mathbf{e}_3,$$

dove si è usata la relazione

$$\mathbf{M}_G = I_a\boldsymbol{\omega}_a = \frac{m\ell^2}{12}\dot{\theta}\mathbf{e}_3,$$

con I_a momento d'inerzia dell'asta rispetto ad una retta passante per G e diretta come $\mathbf{e}_3$, e $\boldsymbol{\omega}_a$ velocità angolare dell'asta. In definitiva proiettando l'equazione (6) lungo $\mathbf{e}_3$ si ottiene (dopo aver diviso per $m\ell$)

$$\frac{\ell}{3}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\ddot{x}\cos\theta = -\frac{1}{2}g\sin\theta. \tag{7}$$

Le equazioni del moto sono la (5) e la (7). La reazione vincolare lungo x in P è espressa in (4).

b) L'energia cinetica del sistema meccanico è la somma di quella del disco (T_d) e dell'asta (T_a):

$$T = T_d + T_a,$$

dove

$$\begin{aligned}
T_d &= \frac{1}{2}M\mathbf{v}_B^2 + \frac{1}{2}I_d\boldsymbol{\omega}_d^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2,\\
T_a &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}I_a\boldsymbol{\omega}_a^2 = \frac{m}{2}(\frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + \ell\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}).
\end{aligned}$$

L'energia potenziale risulta

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mg(R - \frac{\ell}{2}\cos\theta) + MgR.$$

La lagrangiana è la funzione

$$L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = T(\theta,\dot{x},\dot{\theta}) - V(x,\theta).$$

Le due equazioni di Lagrange per x e θ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta},$$

corrispondono rispettivamente alle equazioni (5) e (7).

Terzo Esercizio

a) L'energia potenziale del sistema è

$$V(s_1, s_2) = -mg\cos\alpha(s_1 + s_2) + \frac{k}{2}(s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos 2\alpha).$$

Le configurazioni di equilibrio corrispondono ai punti stazionari di V, cioè alle soluzioni di

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} = \frac{\partial V}{\partial s_2} = 0, \tag{8}$$

dove

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} = -mg\cos\alpha + k(s_1 - s_2\cos 2\alpha),$$
$$\frac{\partial V}{\partial s_2} = -mg\cos\alpha + k(s_2 - s_1\cos 2\alpha).$$

Poichè $\alpha \in (0, \pi/2)$, il sistema (8) ha un'unica soluzione $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, con

$$\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \frac{mg\cos\alpha}{k(1 - \cos 2\alpha)}.$$

Per dimostrare che questa configurazione di equilibrio è stabile mostriamo che è un minimo stretto di V; possiamo poi concludere usando il teorema di Lagrange-Dirichlet. La matrice hessiana di V è data da

$$V'' = k \begin{bmatrix} 1 & -\cos 2\alpha \\ -\cos 2\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

ed è definita positiva (per ogni valore di (s_1, s_2) poichè V'' è costante) in quanto

$$\det V'' = k^2(1 - \cos^2 2\alpha) > 0, \quad \mathrm{tr}\, V'' = 2k > 0.$$

b) Le frequenze proprie sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2},$$

dove λ_1, λ_2 sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2) - \lambda A(\bar{s}_1, \bar{s}_2)) = 0$$

ed

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

è la matrice cinetica. Abbiamo quindi

$$\det(V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2) - \lambda A(\bar{s}_1, \bar{s}_2)) = m^2\lambda^2 - 2km\lambda + k^2\sin^2 2\alpha = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}(1 + \cos 2\alpha), \qquad \lambda_2 = \frac{k}{m}(1 - \cos 2\alpha).$$

I modi normali di oscillazione sono le due famiglie di funzioni vettoriali

$$c_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) u_1, \qquad c_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) u_2,$$

dove, per $j = 1, 2$, $c_j \in \mathbb{R}^+$, $\phi_j \in S^1$ ed u_j è un autovettore di $A^{-1} V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ relativo a λ_j. Una scelta possibile è

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$