

Compito di Meccanica Razionale

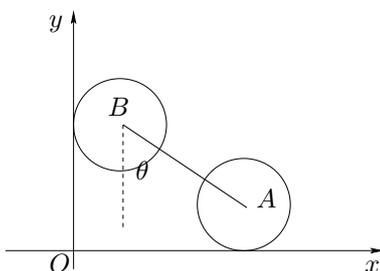
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

6 Giugno 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi in un piano un sistema di riferimento Oxy . Si consideri il sistema meccanico formato da due dischi \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 di uguale raggio R ai cui baricentri sono incernierati gli estremi A, B di un'asta di lunghezza $\ell > 2R$. I due dischi rotolano senza strisciare sugli assi coordinati, \mathcal{D}_1 sull'asse Ox e \mathcal{D}_2 su Oy .

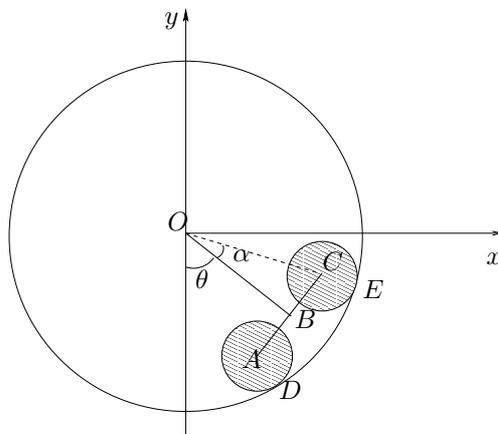


Usando come coordinata l'angolo θ tra l'asta e la direzione di Oy (vedi figura),

- a) determinare le velocità angolari dei due dischi;
- b) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta;
- c) trovare la polare fissa (base) e la polare mobile (rulletta) descritte da C_0 .

Secondo Esercizio

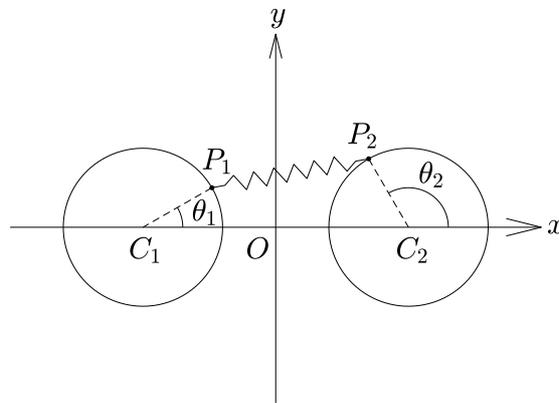
Si consideri il sistema meccanico, mobile in un piano verticale, formato da due dischi omogenei \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 di massa m e raggio r i cui baricentri A e C sono incernierati agli estremi di un'asta di massa trascurabile e lunghezza $2\ell > 2r$. I dischi possono rotolare senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio $R > 2\ell$. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g .



Si fissi il sistema di riferimento Oxy con origine O nel centro della guida circolare ed asse Oy verticale ascendente (vedi figura). Utilizzando come coordinata l'angolo θ tra l'asse Oy e la direzione individuata dal segmento BO , dove B è il punto medio dell'asta, scrivere l'equazione del moto attraverso le equazioni cardinali.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di massa m vincolati a scorrere senza attrito sul bordo di due guide circolari di uguale raggio r e centri $C_1 \equiv (-d, 0), C_2 \equiv (d, 0)$, con $d > r$. I punti P_1, P_2 sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.



Per descrivere le configurazioni del sistema si usino gli angoli θ_1, θ_2 formati dai segmenti P_1C_1, P_2C_2 con l'asse Ox (vedi figura).

- a) Trovare le configurazioni di equilibrio del sistema;
- b) discutere la stabilità di tali configurazioni.

Soluzioni

Primo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$, con le direzioni e i versi di \hat{e}_1 ed \hat{e}_2 dati dagli assi Ox e Oy , rispettivamente, ed $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$. Sia x_A la coordinata x del punto A . La velocità angolare del disco \mathcal{D}_1 si scrive come

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{\dot{x}_A}{R}\hat{e}_3.$$

La relazione tra x_A e l'angolo θ è data da

$$x_A = R + \ell \sin \theta.$$

Si ha

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{\ell \cos \theta}{R}\dot{\theta}\hat{e}_3.$$

Sia y_B la coordinata y del punto B . La velocità angolare del disco \mathcal{D}_2 si scrive come

$$\vec{\omega}_2 = \frac{\dot{y}_B}{R}\hat{e}_3.$$

La relazione tra y_B e l'angolo θ è data da

$$y_B = R + \ell \cos \theta.$$

Si ha

$$\vec{\omega}_2 = -\frac{\ell \sin \theta}{R}\dot{\theta}\hat{e}_3.$$

b) La posizione del centro istantaneo di rotazione dell'asta è data da

$$C_0 - O = \frac{\vec{\omega}_a \times \vec{v}_O}{\|\vec{\omega}_a\|^2},$$

in cui

$$\vec{\omega}_a = \dot{\theta}\hat{e}_3$$

è la velocità angolare dell'asta. La velocità del punto O (solidale all'asta) si calcola dalla formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi

$$\vec{v}_O = \vec{v}_A + \vec{\omega}_a \times (O - A) = \dot{\theta}[(R + \ell \cos \theta)\hat{e}_1 - (R + \ell \sin \theta)\hat{e}_2],$$

con

$$O - A = -(R + \ell \sin \theta)\hat{e}_1 - R\hat{e}_2,$$

$$\vec{v}_A = \ell\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_1.$$

Si ottiene

$$C_0 - O = (R + \ell \sin \theta)\hat{e}_1 + (R + \ell \cos \theta)\hat{e}_2. \quad (1)$$

In alternativa si può usare il teorema di Chasles, dal quale il risultato segue immediatamente.

c) Dette (x_{C_0}, y_{C_0}) le coordinate di C_0 in Oxy , dalla (1) segue subito che la polare fissa descritta da C_0 è una circonferenza con centro nel punto di coordinate $(x, y) = (R, R)$ e raggio ℓ , infatti

$$(x_{C_0} - R)^2 + (y_{C_0} - R)^2 = \ell^2.$$

Per determinare la polare mobile descritta da C_0 introduciamo un sistema di riferimento $B\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ solidale all'asta, con $\hat{\mathbf{e}}'_3 \equiv \hat{\mathbf{e}}_3$ ed $\hat{\mathbf{e}}'_1$ parallelo e concorde ad $(A - B)$. Associamo ad $\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2$ gli assi Bx', By' , rispettivamente; si ha

$$\begin{aligned}x'_{C_0} &= \ell \sin^2 \theta, \\y'_{C_0} &= \ell \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

Queste coordinate soddisfano l'equazione

$$\left(x'_{C_0} - \frac{\ell}{2}\right)^2 + (y'_{C_0})^2 = \frac{\ell^2}{4},$$

che rappresenta una circonferenza con centro nel punto di coordinate $(x', y') = (\frac{\ell}{2}, 0)$ e raggio $\frac{\ell}{2}$.

In alternativa si può giungere alla stessa conclusione per via puramente geometrica, notando che l'angolo $\widehat{AC_0B}$ si mantiene sempre retto durante il moto.

Secondo Esercizio

Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy , rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Scriviamo le quantità seguenti in coordinate nella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$.

Le posizioni e velocità dei centri di massa A, C dei due dischi sono

$$\mathbf{x}_A = (R - r)\hat{\mathbf{e}}_A, \quad \mathbf{v}_A = (R - r)\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_A^\perp, \quad \mathbf{x}_C = (R - r)\hat{\mathbf{e}}_C, \quad \mathbf{v}_C = (R - r)\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_C^\perp,$$

con

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_A &= \sin(\theta - \alpha)\mathbf{e}_1 - \cos(\theta - \alpha)\mathbf{e}_2, \\ \hat{\mathbf{e}}_A^\perp &= \cos(\theta - \alpha)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta - \alpha)\mathbf{e}_2, \\ \hat{\mathbf{e}}_C &= \sin(\theta + \alpha)\mathbf{e}_1 - \cos(\theta + \alpha)\mathbf{e}_2, \\ \hat{\mathbf{e}}_C^\perp &= \cos(\theta + \alpha)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta + \alpha)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Le velocità angolari $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ dei due dischi si ricavano dalle formule

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_A), \\ \mathbf{v}_E &= \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_C),\end{aligned}$$

imponendo che $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_E = \mathbf{0}$. Si trova

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = -\frac{R - r}{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale della dinamica per il disco \mathcal{D}_1 rispetto al polo A :

$$\dot{\mathbf{M}}_A = \mathbf{N}_A^{(e)}.$$

Il momento delle forze esterne risulta

$$\mathbf{N}_A^{(e)} = (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_A) \times \boldsymbol{\Phi}_D = r\Phi_{D,\tau}\mathbf{e}_3,$$

dove $\Phi_{D,\tau}$ è la componente della reazione $\boldsymbol{\Phi}_D$ esercitata dalla guida sul disco \mathcal{D}_1 lungo il vettore $\hat{\mathbf{e}}_A^\perp$, tangente alla guida in D . Usando la relazione $\mathbf{M}_A = \frac{mr^2}{2}\boldsymbol{\omega}_1$ si ottiene

$$\Phi_{D,t} = -\frac{m}{2}(R - r)\ddot{\theta}\mathbf{e}_3. \quad (2)$$

In maniera analoga, scrivendo la seconda equazione cardinale per il disco \mathcal{D}_2 rispetto al polo C si ottiene

$$\Phi_{E,\tau} = -\frac{m}{2}(R-r)\ddot{\theta}\mathbf{e}_3, \quad (3)$$

dove $\Phi_{E,\tau}$ è la componente della reazione Φ_E esercitata dalla guida sul disco \mathcal{D}_2 lungo il vettore $\hat{\mathbf{e}}_C^\perp$, tangente alla guida in E .

La seconda equazione cardinale per l'intero sistema rispetto al polo fisso O è

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O^{(e)},$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_O^{(e)} &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \times (-mg\mathbf{e}_2) + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O) \times (-mg\mathbf{e}_2) \\ &\quad + (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_O) \times \Phi_D + (\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_O) \times \Phi_E, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{N}_O^{(e)} = -2mg(R-r)\sin\theta\cos\alpha\mathbf{e}_3 + R(\Phi_{D,\tau} + \Phi_{E,\tau})\mathbf{e}_3.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_C + m(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_O) \times \mathbf{v}_A + m(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O) \times \mathbf{v}_C \\ &= -mr(R-r)\dot{\theta}\mathbf{e}_3 + 2m(R-r)^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Tenendo conto delle relazioni 2, 3 si ottiene

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin\theta\cos\alpha.$$

Terzo Esercizio

a) Le coordinate dei punti P_1, P_2 sono

$$\begin{cases} x_1 = -d + r\cos\theta_1 \\ y_1 = r\sin\theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = d + r\cos\theta_2 \\ y_2 = r\sin\theta_2 \end{cases}$$

per cui l'energia potenziale dell'unica forza esterna (quella della molla) è

$$V(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}k[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2] = 2kdr(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - kr^2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \text{costante}$$

Le configurazioni di equilibrio sono date dai punti stazionari di V , soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 2kdr\sin\theta_1 + kr^2\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -2kdr\sin\theta_2 - kr^2\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Sommando le due equazioni si ottiene

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2 \quad (5)$$

per cui $\theta_2 = \theta_1$ oppure $\theta_2 = \pi - \theta_1$.

Sostituendo (5) nella prima equazione in (4) si ottiene

$$\sin\theta_1[2d + r(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)] = 0,$$

che ha solo le soluzioni

$$\theta_1 = 0, \pi$$

in $[0, 2\pi)$, infatti l'espressione tra parentesi quadre non si annulla mai per $d > r$.
Concludo che le configurazioni di equilibrio sono solo

$$(\theta_1, \theta_2) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi).$$

b) Per studiare la stabilità degli equilibri calcolo la matrice hessiana V'' dell'energia potenziale. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} &= 2kdr \cos \theta_1 + kr^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} &= -kr^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} &= -2kdr \cos \theta_2 + kr^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}V''(0, 0) &= kr \begin{bmatrix} 2d+r & -r \\ -r & -2d+r \end{bmatrix} & V''(0, \pi) &= kr \begin{bmatrix} 2d-r & r \\ r & 2d-r \end{bmatrix} \\ V''(\pi, 0) &= kr \begin{bmatrix} -2d-r & r \\ r & -2d-r \end{bmatrix} & V''(\pi, \pi) &= kr \begin{bmatrix} -2d+r & -r \\ -r & 2d+r \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Concludo che

$\det V''(0, 0) = -(2krd)^2 < 0$ per cui ci deve essere un autovalore negativo, quindi $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ è instabile;

$\det V''(0, \pi) = (kr)^2((2d-r)^2 - r^2) > 0$ e $\text{tr} V''(0, \pi) = 2kr(2d-r) > 0$ per cui $(\theta_1, \theta_2) = (0, \pi)$ è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;

$\text{tr} V''(\pi, 0) = -4kr^2d < 0$ per cui ci deve essere un autovalore negativo, quindi $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$ è instabile;

$\det V''(\pi, \pi) = -(2krd)^2 < 0$ per cui ci deve essere un autovalore negativo, quindi $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, \pi)$ è instabile.