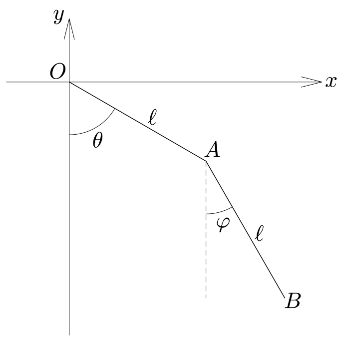
Compito di Meccanica Razionale
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
5 Aprile 2017
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano orizzonale si fissi un sistema di riferimento Oxy. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da due aste uguali di lunghezza ℓ. Un estremo della prima asta è incernierato nell'origine O, mentre all'altro estremo A è incernierato un estremo della seconda asta (vedi figura).



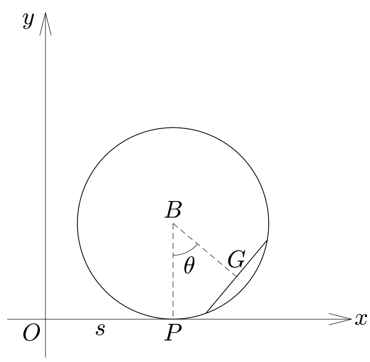
Usando come coordinate l'angolo θ tra l'asta OA e la direzione dell'asse Oy e l'angolo φ tra l'asta AB e la direzione dell'asse Oy,

a) calcolare le coordinate del centro istantaneo di rotazione C_0 dell'asta AB;

b) trovare la polare fissa (base) e la polare mobile (rulletta) descritte da C_0 nell'ipotesi in cui $\dot{\varphi} = 2\dot{\theta}$.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un anello omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse Ox e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza R con gli estremi liberi di scorrere senza attrito sull'anello. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



Siano B e G i baricentri dell'anello e dell'asta. Usando come coordinate l'ascissa s del punto B e l'angolo θ tra il segmento BG e la direzione verticale (vedi figura),

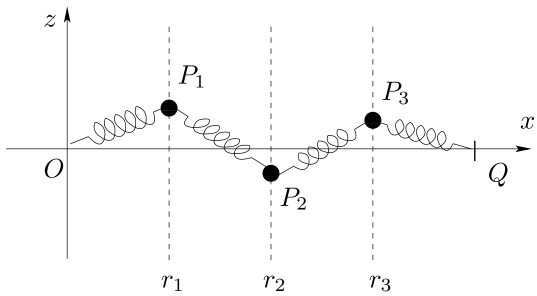
a) scrivere le equazioni di Lagrange per il sistema;

b) scrivere la seconda equazione cardinale per l'asta rispetto al polo B;

c) determinare la componente orizzontale della reazione vincolare che agisce sull'anello nel punto di contatto P con l'asse Ox.

Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz, con asse Oz verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico formato da tre punti materiali P_1, P_2, P_3 di massa m vincolati a scorrere senza attrito su tre rette verticali r_1, r_2, r_3 passanti per i punti di coordinate $(x, z) = (\ell, 0)$, $(2\ell, 0)$, $(3\ell, 0)$, con $\ell > 0$. Sui tre punti agiscono delle forze elastiche esercitate da quattro molle uguali, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Queste molle sono disposte come in figura: due di esse collegano P_i a P_{i+1} con $i = 1, 2$, le altre due collegano P_1 al punto O e P_3 al punto Q di coordinate $(x, z) = (4\ell, 0)$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



Per descrivere le configurazioni del sistema si usino le ordinate z_1, z_2, z_3 dei punti P_1, P_2, P_3 lungo le rette r_1, r_2, r_3.

1. Dimostrare che il sistema meccanico ha un'unica configurazione di equilibrio e trovare le sue coordinate;

2. dimostrare che tale equilibrio è stabile;

3. calcolare le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a questa configurazione.

Soluzioni

Primo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy, rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. La posizione del centro istantaneo di rotazione dell'asta AB è data da

$$C_0 - O = A - O + \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}_A}{\|\vec{\boldsymbol{\omega}}\|^2},$$

in cui

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_3$$

è la velocità angolare dell'asta. La posizione e la velocità del punto A si calcolano come segue

$$\begin{aligned} A - O &= \ell(\hat{\mathbf{e}}_1 \sin\theta - \hat{\mathbf{e}}_2 \cos\theta), \\ \vec{\mathbf{v}}_A &= \ell\dot{\theta}(\hat{\mathbf{e}}_1 \cos\theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \sin\theta). \end{aligned}$$

Si ottiene

$$C_0 - O = \ell\Big(1 - \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\Big)(\hat{\mathbf{e}}_1 \sin\theta - \hat{\mathbf{e}}_2 \cos\theta).$$

b) Nell'ipotesi in cui $\dot{\varphi} = 2\dot{\theta}$ si ha

$$C_0 - O = \frac{\ell}{2}(\hat{\mathbf{e}}_1 \sin\theta - \hat{\mathbf{e}}_2 \cos\theta).$$

Dette (x_{C_0}, y_{C_0}) le coordinate di C_0 in Oxy, segue subito che la polare fissa descritta da C_0 è una circonferenza con centro nel punto O e raggio $\frac{\ell}{2}$, infatti

$$x_{C_0}^2 + y_{C_0}^2 = \frac{\ell^2}{4}.$$

Per determinare la polare mobile descritta da C_0 introduciamo un sistema di riferimento $A\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ solidale all'asta AB, con $\hat{\mathbf{e}}'_3 \equiv \hat{\mathbf{e}}_3$ ed $\hat{\mathbf{e}}'_1$ parallelo e concorde a $(B - A)$. Associamo ad $\hat{\mathbf{e}}'_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_2$ gli assi Ax', Ay', rispettivamente. Grazie alle relazioni

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \hat{\mathbf{e}}'_1 \sin\varphi + \hat{\mathbf{e}}'_2 \cos\varphi, \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= -\hat{\mathbf{e}}'_1 \cos\varphi + \hat{\mathbf{e}}'_2 \sin\varphi. \end{aligned}$$

si ottiene

$$C_0 - A = -\frac{\ell}{2}[\hat{\mathbf{e}}'_1 \cos(\theta - \varphi) + \hat{\mathbf{e}}'_2 \sin(\theta - \varphi)].$$

Concludiamo che la polare mobile è una circonferenza con centro nel punto A e raggio $\frac{\ell}{2}$.

Secondo Esercizio

a) Introduciamo il sistema di riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, con le direzioni e i versi di $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ dati dagli assi Ox e Oy, rispettivamente, ed $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$. Scriviamo le quantità seguenti in coordinate nella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$. Le posizioni dei baricentri B dell'anello e G dell'asta sono

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= s\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{x}_G &= (s + \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\theta)\mathbf{e}_1 + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)R\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Le velocità angolari dell'anello e dell'asta sono

$$\boldsymbol{\omega}_1 = -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_3, \qquad\qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

L'energia cinetica del sistema meccanico è la somma di quella dell'anello (T_1) e dell'asta (T_2):

$$T = T_1 + T_2,$$

dove

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}M\mathbf{v}_B^2 + \frac{1}{2}I_1\boldsymbol{\omega}_1^2 = M\dot{s}^2,\\
T_2 &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}I_2\boldsymbol{\omega}_2^2 = \frac{1}{2}m\Big(\dot{s}^2 + \frac{5}{6}R^2\dot{\theta}^2 + \sqrt{3}R\dot{s}\dot{\theta}\cos\theta\Big),
\end{aligned}$$

dove $I_1 = MR^2$, $I_2 = \frac{mR^2}{12}$. L'energia potenziale risulta

$$V = MgR + mgR(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta).$$

La lagrangiana è la funzione

$$L(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{s}, \dot{\theta}) - V(\theta).$$

Le due equazioni di Lagrange per s e θ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial s},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta},
\end{aligned}$$

diventano

$$(2M + m)\ddot{s} + mR\frac{\sqrt{3}}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{5}{3}R\ddot{\theta} + \sqrt{3}(\ddot{s}\cos\theta + g\sin\theta) = 0. \tag{2}$$

b) Scriviamo la seconda equazione cardinale per l'asta prendendo come polo il punto B:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = \mathbf{N}_B^{(e)} - m\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_G. \tag{3}$$

Le velocità risultano

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_B &= \dot{s}\mathbf{e}_1,\\
\mathbf{v}_G &= (\dot{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}R\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}R\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Determiniamo il momento delle forze esterne

$$\mathbf{N}_B^{(e)} = (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_B) \times (-mg)\mathbf{e}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg\sin\theta\mathbf{e}_3.$$

Il momento angolare è

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_G + m(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_G = \frac{mR}{2}(\frac{5}{3}R\dot{\theta} + \sqrt{3}\dot{s}\cos\theta)\mathbf{e}_3,$$

dove si è usata la relazione

$$\mathbf{M}_G = I_2 \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{mR^2}{12}\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

In definitiva proiettando l'equazione (3) lungo $\mathbf{e}_3$ si ottiene (dopo aver diviso per mR) l'equazione (2).

c) La seconda equazione cardinale per l'anello prendendo come polo il punto B è:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = \mathbf{N}_B^{(e)},$$

dove

$$\mathbf{M}_B = I_1 \boldsymbol{\omega}_1 = -MR\dot{s}\mathbf{e}_3.$$

Il momento delle forze esterne è dato da

$$\mathbf{N}_B^{(e)} = (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{\Phi}_P = R\Phi_{P,x}\mathbf{e}_3.$$

Si trova dunque che

$$\Phi_{P,x} = -M\ddot{x}.$$

Terzo Esercizio

a) L'energia potenziale del sistema è

$$\begin{aligned} V(z_1, z_2, z_3) &= \frac{k}{2}[z_1^2 + \ell^2 + (z_2 - z_1)^2 + \ell^2 + (z_3 - z_2)^2 + \ell^2 + z_3^2 + \ell^2] + mg(z_1 + z_2 + z_3) = \\ &= k(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3) + mg(z_1 + z_2 + z_3) + \text{costante}. \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio corrispondono ai punti stazionari di V, cioè alle soluzioni di

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = \frac{\partial V}{\partial z_2} = \frac{\partial V}{\partial z_3} = 0, \tag{4}$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z_1} &= k(2z_1 - z_2) + mg, \\ \frac{\partial V}{\partial z_2} &= k(2z_2 - z_1 - z_3) + mg, \\ \frac{\partial V}{\partial z_3} &= k(2z_3 - z_2) + mg. \end{aligned}$$

L'unica soluzione del sistema è $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ con

$$\bar{z}_1 = \bar{z}_3 = -\frac{3}{2}\alpha, \quad \bar{z}_2 = -2\alpha, \qquad \text{dove } \alpha = \frac{mg}{k}.$$

Per dimostrare che questa configurazione di equilibrio è stabile mostriamo che è un minimo stretto di V; possiamo poi concludere usando il teorema di Lagrange-Dirichlet. La matrice hessiana di V è data da

$$V'' = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si verifica che V'' è definita positiva (per ogni valore di (s_1, s_2, s_3) poichè V'' è costante) essendo i tre minori principali di guida di V'' maggiori di zero (stiamo usando il criterio di Sylvester). Si può fare tale verifica anche osservando che per ogni $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ vale la formula

$$\frac{1}{k}\mathbf{u} \cdot V''\mathbf{u} = 2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2u_1u_2 - 2u_2u_3 = u_1^2 + u_3^2 + (u_1 - u_2)^2 + (u_2 - u_3)^2.$$

b) Le frequenze proprie sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\lambda_3},$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) - \lambda A(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)) = 0$$

ed

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

è la matrice cinetica. Abbiamo quindi

$$\det(V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) - \lambda A(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)) = (2k - \lambda m)[(2k - \lambda m)^2 - 2k^2] = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{2k}{m}, \qquad \lambda_2 = (2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}, \qquad \lambda_3 = (2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}.$$

I modi normali di oscillazione sono le tre famiglie di funzioni vettoriali

$$c_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)u_1, \qquad c_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)u_2, \qquad c_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)u_3,$$

dove, per $j = 1, 2, 3$, $c_j \in \mathbb{R}^+$, $\phi_j \in S^1$ ed u_j un autovettore di $V''(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3) - \lambda_j A(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3)$. Una scelta possibile è

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$