Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
27 Gennaio 2017
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri una lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, con $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$, invariante per il gruppo a 1 parametro di diffeomorfismi definito da

$$\varphi_\alpha(\mathbf{q}) = R_\alpha \mathbf{q} + \alpha \mathbf{e}_3, \quad R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Trovare il generatore infinitesimo dell'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^3$ definita da φ_α.
2. Dimostrare che in un intorno di ogni punto dell'insieme
$$\mathcal{D} = \{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 : q_1^2 + q_2^2 \neq 0\}$$
si può definire una trasformazione di coordinate
$$\mathbf{q} \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} \mathbf{Q}$$
tale che nelle nuove coordinate $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ la variabile Q_1 sia ciclica nella lagrangiana
$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = L\Big(\mathbf{\Psi}^{-1}(\mathbf{Q}), \frac{\partial \mathbf{\Psi}^{-1}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q})\dot{\mathbf{Q}}\Big).$$
3. Scrivere esplicitamente la trasformazione inversa $\mathbf{\Psi}^{-1}$.

Esercizio 2. Siano A, B, C, D matrici simmetriche di ordine $n \in \mathbb{N}$, con A invertibile.

i) Trovare delle condizioni su A, B, C, D necessarie e sufficienti affinché le relazioni
$$\begin{cases} \mathbf{P} = A\mathbf{p} + B\mathbf{q} \\ \mathbf{Q} = C\mathbf{p} + D\mathbf{q} \end{cases} \qquad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$
definiscano una trasformazione canonica univalente, indicata con $\mathbf{\Psi}$.

ii) Assumendo che valgano le condizioni del punto i), trovare delle condizioni necessarie e sufficienti su A, D affinché esista una funzione generatrice $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ per $\mathbf{\Psi}$, scrivere l'espressione di S.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione

$$H_\epsilon(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1^2 + 2I_2^2 + 3I_3^2) - \epsilon \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\varphi_3),$$

dove $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$ sono variabili azione-angolo ed $\epsilon \ll 1$ è un piccolo parametro.

1. Trovare tre integrali primi indipendenti e in involuzione del sistema.
2. Mostrare che le variabili di azione I_j compiono oscillazioni limitate da $C_j\sqrt{\epsilon}$ per delle costanti $C_j > 0$, $j = 1, 2, 3$.
3. Trovare il valore ottimale della costante C_j per ciascuna variabile di azione.