Secondo compitino di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Dicembre 2016
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si considerino le due funzioni

$$H_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2), \qquad H_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + q_2,$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2), \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Si dimostri che i campi vettoriali hamiltoniani $X_j = X_{H_j}$, $j = 1, 2$, sono integrabili, trovando in ciascuno dei due casi una coppia di integrali primi F_j, G_j in involuzione e genericamente[1] indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

ii) Si dimostri che il campo vettoriale

$$X_3 = [X_2, X_1]$$

è hamiltoniano e integrabile, trovando una coppia di integrali primi F_3, G_3 in involuzione e genericamente indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

iii) Si consideri il flusso

$$\Phi_3^t(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

del campo vettoriale X_3 e la proiezione naturale

$$\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \pi_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (p_2, q_2).$$

Si dimostri che per ogni $(\bar{p}_1, \bar{q}_1) \in \mathbb{R}^2$ la mappa

$$\mathbb{R}^2 \ni (p_2, q_2) \mapsto \pi_2 \circ \Phi_3^t(\bar{p}_1, p_2, \bar{q}_1, q_2)$$

conserva l'area.

Esercizio 2. Si consideri la hamiltoniana

$$H_\epsilon(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{I}|^2 + \epsilon f(\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{I} = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3,$$

con

$$f(\boldsymbol{\varphi}) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \cos(2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3).$$

i) Si trovi la forma normale risonante $\tilde{H}_\epsilon$ di H_ϵ relativa alla risonanza singola definita da $k = (2, -1, -1)$.

ii) Si consideri la hamiltoniana $\mathcal{H}_\epsilon$ ottenuta da $\tilde{H}_\epsilon$ trascurando i termini $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ e si dimostri che essa definisce un sistema hamiltoniano integrabile trovando tre integrali primi in involuzione e genericamente indipendenti.

iii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione I_j, $j = 1, 2, 3$ al primo ordine in ϵ e mostrare che, all'interno della risonanza considerata, vale il principio della media.

[1] cioè, escludendo al più un sottoinsieme di misura nulla