Primo compitino di Istituzioni di Fisica Matematica
18 Novembre 2016
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -2x + \alpha, \tag{1}$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

i) Trovare una lagrangiana L che ha (1) come equazione di Eulero-Lagrange e scrivere il funzionale di azione lagrangiana $\mathcal{A}_L$ con estremi $t_0 = 0, t_1 > 0$.

ii) Trovare la soluzione $t \mapsto \gamma_0(t)$ di (1) con condizioni iniziali $\gamma_0(0) = 1$, $\dot{\gamma}_0(0) = 0$ e scrivere l'equazione di Jacobi corrispondente a L e γ_0.

iii) Calcolare l'estremo superiore dei tempi $t_1 > 0$ tali che γ_0 è un minimo debole di $\mathcal{A}_L$ nell'insieme delle funzioni $C^1([0, t_1]; \mathbb{R})$.

Esercizio 2.

i) Mostrare che la funzione

$$S(q, P, t) = \exp\Big[(1 + t^2)\Big(\frac{q^2}{2} + P\Big)\Big]$$

genera una trasformazione canonica univalente dipendente dal tempo t

$$(p, q, t) \overset{\Psi}{\mapsto} (P, Q, t)$$

definita su $(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^2 \times \mathbb{R}$.

ii) Scrivere le componenti del campo vettoriale hamiltoniano

$$X_K = \Psi_* X_H,$$

dove

$$H(p, q, t) = P^2(p, q, t) + \frac{p^2}{q^2} - \frac{2t}{1 + t^2}\Big(\frac{q^2}{2} + P(p, q, t)\Big)\frac{p}{q}$$

e $P(p, q, t)$ è definita da Ψ.