Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
14 Febbraio 2017
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - q, \qquad q, \dot{q} \in \mathbb{R}.$$

1. Calcolare l'espressione dell'azione lagrangiana

$$S(t_1, q_1) = \int_0^{t_1} L(\gamma(t; t_1, q_1), \dot{\gamma}(t; t_1, q_1))dt$$

come funzione delle coordinate $(t_1, q_1) \in Q^+ = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, dove per ogni $(t_1, q_1) \in Q^+$ la funzione $t \mapsto \gamma(t; t_1, q_1)$ è la soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange per L tale che

$$\gamma(0; t_1, q_1) = 0, \qquad \dot{\gamma}(0; t_1, q_1) = \frac{1}{t_1}\Big(q_1 + \frac{t_1^2}{2}\Big).$$

2. Sia H la funzione di Hamilton associata ad L. Mostrare che $S(t_1, q_1)$ soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi associata ad H per la funzione principale di Hamilton.

Esercizio 2.

i) Si consideri la trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \tag{1}$$

definita da

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \tag{2}$$

dove, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ è una matrice simplettica univalente di ordine $2n$, $n \geq 1$.

Estendere tale trasformazione ad una trasformazione canonica definita nello spazio delle fasi esteso, con coordinate $(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t)$, $e \in \mathbb{R}$.

ii) Si completi la relazione

$$\mathbf{Q} = B(t)\mathbf{q}, \quad \text{con } B(t) = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2, \ t \in \mathbb{R}$$

ad una trasformazione canonica univalente della forma definita da (1), (2), con $n = 2$, e si applichi il risultato del punto i) a tale trasformazione.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\boldsymbol{\varphi}),$$

con

$$h(\mathbf{I}) = I_1 + 2I_2, \quad f(\boldsymbol{\varphi}) = \cos^2(\varphi_1 + \varphi_2)\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2),$$

dove

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \epsilon \ll 1.$$

Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \overset{\Psi_\epsilon}{\mapsto} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ.