

## Compito di Meccanica Razionale

27 Gennaio 2017

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

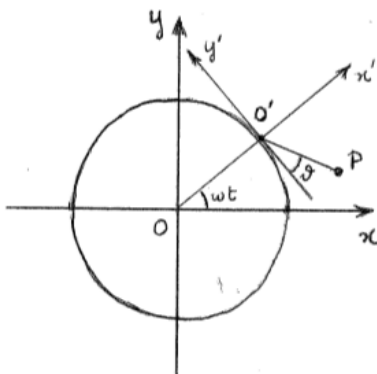
### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  con asse  $Oz$  verticale ascendente. Un'ellisse (piena) omogenea, di massa  $m$  e semiassi  $a > b > 0$  è libera di ruotare mantenendo il suo baricentro  $B$  fisso nell'origine  $O$ . Assumiamo che l'ellisse si muova con velocità angolare  $\omega$  costante, diretta lungo  $Oz$ :  $\omega = \omega \mathbf{e}^3$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .

- Determinare i momenti principali di inerzia dell'ellisse rispetto al baricentro  $B$ .
- Calcolare il momento delle forze  $\mathbf{N}_B$ , rispetto al polo  $B$ , necessario a mantenere il moto prestabilito dell'ellisse.

### Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente e si consideri un pendolo costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e da un'asta  $O'P$  di massa trascurabile e lunghezza  $\ell$ . L'estremo  $O'$  dell'asta si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio  $R$  centrata in  $O$ .



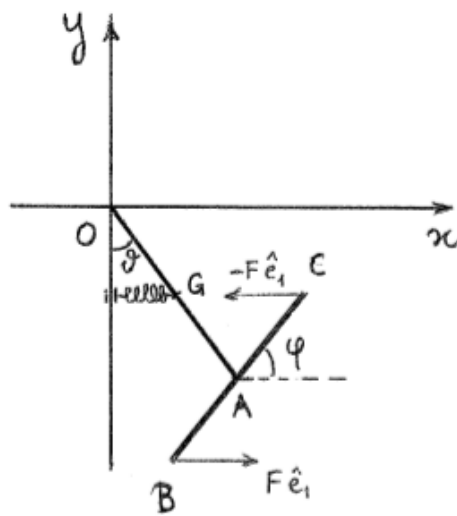
Si consideri anche un secondo sistema di riferimento  $\Sigma' = O'x'y'$  con asse  $O'x'$  parallelo ad  $OO'$ . Usando come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione di  $O'y'$  (vedi figura) e assumendo che su  $P$  agisca anche la forza di gravità, di accelerazione  $g$ ,

- scrivere la lagrangiana  $L$  del sistema meccanico nel riferimento  $\Sigma$ ;
- scrivere la lagrangiana  $L'$  del sistema meccanico nel riferimento  $\Sigma'$ ;
- mostrare che  $L$  ed  $L'$  sono equivalenti, trovando una funzione  $F(\theta, t)$  tale che

$$L = L' + \frac{d}{dt}F.$$

### Terzo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ , con asse  $y$  verticale ascendente. Nel piano sono mobili due aste omogenee,  $OA$  e  $BC$ , di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . La prima asta ha l'estremo  $O$  incernierato nell'origine; l'altro estremo  $A$  è collegato al punto medio dell'asta  $BC$ . Il punto medio  $G$  dell'asta  $OA$  è richiamato verso l'asse delle ordinate da una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla che si mantiene orizzontale. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $g$  ed una coppia di forze aventi direzione orizzontale e intensità costante  $F > 0$  applicate agli estremi  $B$  e  $C$  dell'asta  $BC$ . Si utilizzino come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  che l'asta  $OA$  forma con la verticale discendente e l'angolo  $\varphi$  che l'asta  $BC$  forma con la direzione orizzontale.



- Scrivere la lagrangiana del sistema.
- Introducendo il parametro adimensionale  $J = \frac{mg}{k\ell}$ , trovare gli equilibri del sistema e discuterne la stabilità al variare di  $J$ .
- Nell'ipotesi  $J < \frac{1}{3}$  e  $F = \frac{mg}{3}$ , trovare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.