

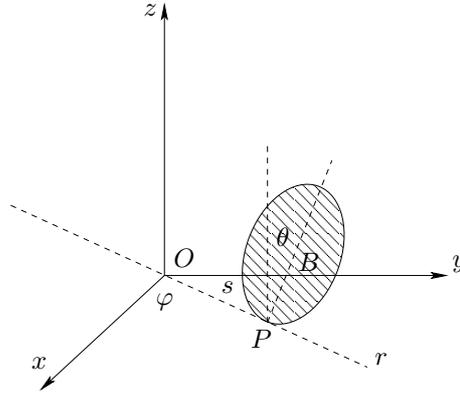
Compito di Meccanica Razionale

8 Luglio 2016

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo \mathcal{D} di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea r incernierata nell'origine O , che a sua volta può ruotare nel piano Oxy . Il disco può anche inclinarsi, con il vincolo che r rimanga nel piano di \mathcal{D} . Si usino come coordinate l'angolo φ che r forma con Ox , l'ascissa s del punto di contatto P tra \mathcal{D} ed r e l'angolo θ che il disco forma con il piano generato da r e Oz (vedi figura).



1. Calcolare la velocità angolare del disco.
2. Scrivere la proiezione lungo l'asse Oz della seconda equazione cardinale rispetto al polo P .

Secondo Esercizio

In un piano verticale Oxy , con asse Oy verticale ascendente è mobile un sistema materiale composto da un'asta AB (omogenea, di massa m e lunghezza $\sqrt{3}R$) con gli estremi vincolati a muoversi su una guida circolare di raggio R e centro O , e un punto materiale P di massa m vincolato a scorrere sull'asse Ox (si veda figura). Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione g , una forza elastica attraverso una molla di lunghezza a riposo nulla e costante positiva k che collega P con il punto medio C di AB , e una coppia di momento $\mathbf{N} = -(1/4)mgR \sin \theta \mathbf{e}_3$, dove θ è l'angolo che il vettore $C-O$ forma con il semiasse negativo delle ordinate. Utilizzando i parametri lagrangiani θ e s (ascissa del punto P):

- a) si scriva la Lagrangiana del sistema;
- b) si studino le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità al variare del parametro adimensionale $\alpha = mg/(kR)$;

- c) si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile nell'ipotesi $\alpha = 1$.

Terzo Esercizio

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su di un cono di apertura α . L'asse del cono è verticale e sul punto agisce la forza di gravità di accelerazione g . Si utilizzino come coordinate lagrangiane le coordinate polari r e θ della proiezione del punto P sul piano orizzontale.

- a) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- b) Ridurre il problema ad un grado di libertà per la coordinata r utilizzando la riduzione di Routh.
- c) Studiare il problema ridotto, disegnando il diagramma di fase, e dedurre risultati sul moto completo.