Primo compitino di Istituzioni di Fisica Matematica
18 Novembre 2015
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri l'equazione di Newton

$$m\ddot{x} = f(x), \qquad x \in (0, +\infty), \tag{1}$$

con $m > 0$, $f \in C^1\big((0,+\infty);\mathbb{R}\big)$.

i) Trovare la lagrangiana L che ha (1) come equazione di Eulero-Lagrange e scrivere il funzionale di azione lagrangiana J_L con estremi $t_0 = 0, t_1 > 0$.

ii) Nel caso in cui

$$f(x) = -\frac{k}{x^2}, \qquad k > 0,$$

scrivere il funzionale ausiliario e l'equazione di Jacobi corrispondente a L e alla soluzione $\gamma_0(t)$ di (1), con $\gamma_0(0) = 1$ e $\dot{\gamma}_0(0) = \sqrt{2k/m}$.

iii) Dimostrare che γ_0 è un minimo debole di J_L nell'insieme delle funzioni $C^1([0,t_1];\mathbb{R})$ per ogni $t_1 > 0$.

Esercizio 2. Si consideri la hamiltoniana

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{1-|\mathbf{q}|^2}, \qquad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{q} \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^n \setminus S^{n-1}.$$

i) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica W e si dimostri che le variabili $\mathbf{q}$ sono separabili.

ii) Trovare un integrale completo $W(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, dell'equazione di Hamilton-Jacobi e dimostrare che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial\boldsymbol{\alpha}\partial\mathbf{q}}(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha}) \neq 0, \qquad \forall\, \mathbf{q} \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^n \setminus S^{n-1}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n.$$

iii) Trovare una trasformazione canonica generata da W.