

Secondo compito di Istituzioni di Fisica Matematica

18 Dicembre 2015

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si considerino i due sistemi hamiltoniani con funzioni di Hamilton

$$H_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{q}|^2, \quad H_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - \frac{1}{|\mathbf{q}|},$$

definiti rispettivamente sugli insiemi

$$\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{D}_2 = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}).$$

Siano inoltre Φ_1^t, Φ_2^t i flussi dei campi vettoriali hamiltoniani X_{H_1}, X_{H_2} associati ad H_1, H_2 .

1. Scrivere le espressioni dei campi X_{H_1}, X_{H_2} e mostrare che in generale i flussi Φ_1^t e Φ_2^t non commutano.
2. Trovare un sottoinsieme \mathcal{I} di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, invariante per entrambi i campi X_{H_1}, X_{H_2} , tale che i flussi Φ_1^t, Φ_2^t ristretti ad \mathcal{I} commutino.¹
3. Trovare una funzione $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ definita su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ che soddisfi la relazione

$$\{\{H_1, H_2\}, f\} = 0.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}),$$

con

$$h(\mathbf{I}) = I_1 \omega_1 + \frac{I_2^2}{2}, \quad f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = I_1 \cos(2\varphi_1 + \varphi_2) \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2),$$

dove

$$\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \epsilon \ll 1.$$

1. Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ al primo ordine in ϵ .

2. (*facoltativo*) Scrivere esplicitamente lo sviluppo di Taylor della hamiltoniana K_ϵ fino al secondo ordine in ϵ .

¹*Suggerimento:* si consideri il campo hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}[|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2],$$

si dimostri che le funzioni

$$|\mathbf{p}|^2, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \quad |\mathbf{q}|^2$$

sono costanti lungo le soluzioni del sistema hamiltoniano definito da K e si scelgano valori particolari per tali costanti.