Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
14 Giugno 2016
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri il funzionale di azione lagrangiana

$$J_L(\gamma) = \int_1^2 [t\dot{\gamma}^2 + \gamma(1-\dot{\gamma})]\, dt.$$

1. Mostrare che le soluzioni $\gamma(t)$ dell'equazione di Eulero-Lagrange per J_L con $\dot{\gamma}(1) = 0$ soddisfano la relazione
$$\dot{\gamma}(t) < \frac{1}{2}, \qquad \forall t \in [1,2].$$
2. Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ dell'equazione di Eulero-Lagrange per J_L con condizioni iniziali
$$\bar{\gamma}(1) = \frac{1}{2}, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(1) = 0$$
è un minimo debole per il funzionale J_L.

Esercizio 2. Si considerino le funzioni di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}[|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2] + V(|\mathbf{q}|), \qquad K(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2),$$

dove $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2.

1. Calcolare la parentesi di Lie
$$[X_H, X_K] \tag{1}$$
dei campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K.
2. Assumendo che
$$V(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$
e che $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$, mostrare che il sistema hamiltoniano definito da
$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = [X_H, X_K]$$
è integrabile con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi), \qquad I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{T}^2,$$

dove

$$h(I) = \frac{1}{2}|I|^2$$

e

$$f(I,\phi) = -|I|^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \overset{\Psi}{\mapsto} (\tilde{I},\tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ.