Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
13 Settembre 2016
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa m che si muove in un piano, nel campo di forze generato da due centri fissi di attrazione O_1, O_2 posti a distanza $2d$ l'uno dall'altro ($d > 0$). Introduciamo in tale piano un sistema di riferimento Oxy, con asse Ox diretto lungo la retta congiungente i due centri e con l'origine O posto a distanza d da ciascuno di essi.

Le forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ sviluppate da ciascuno dei centri su P quando questo si trova nel punto di coordinate (x, y) sono date da

$$\mathbf{F}_1(x,y) = -\frac{(x-d,y)}{[(x-d)^2+y^2]^{3/2}}\,, \qquad \mathbf{F}_2(x,y) = -\frac{(x+d,y)}{[(x+d)^2+y^2]^{3/2}}\,.$$

Mostrare che le coordinate ellittiche (ξ, η), definite da

$$x = d\cosh\xi\cos\eta\,, \qquad y = d\sinh\xi\sin\eta\,,$$

sono variabili separabili per l'equazione di Hamilton-Jacobi di questo sistema meccanico.

Esercizio 2. Sia data una funzione positiva $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Cercare una trasformazione canonica

$$\mathbb{R}^4 \ni (p, e, q, \tau) \overset{\Psi}{\mapsto} (I, \mathcal{E}, \varphi, \tau) \in \mathbb{R}^4$$

tale che

$$p = \sqrt{2I\omega(\tau)}\cos\varphi, \qquad q = \sqrt{\frac{2I}{\omega(\tau)}}\sin\varphi.$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}[|\mathbf{p}|^2|\mathbf{q}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2],$$

con $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ed il gruppo di matrici

$$SL(2) = \{M \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2,2) : \det M = 1\}.$$

Sia inoltre

$$\Psi : SL(2) \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

l'azione di $SL(2)$ su $\mathbb{R}^{2n}$ definita da

$$\Psi(M, (\mathbf{p},\mathbf{q})) = (a\mathbf{p} + b\mathbf{q}, c\mathbf{p} + d\mathbf{q}), \qquad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

i) Provare che per ogni $M \in SL(2)$ la trasformazione $\Psi(M, \cdot)$ è canonica.

ii) Verificare che

$$H(\Psi(M,(\mathbf{p},\mathbf{q}))) = H(\mathbf{p},\mathbf{q}), \qquad \forall M \in SL(2), \forall(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

iii) Date le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

verificare che gli insiemi

$$G_j = \{\exp(A_j t), t \in \mathbb{R}\}, \qquad j = 1, 2, 3$$

sono sottogruppi a un parametro di $SL(2)$ e che i campi vettoriali

$$X_j = \frac{d}{dt} \exp(A_j t)\Big|_{t=0}, \qquad j = 1, 2, 3$$

sono hamiltoniani.

iv) Mostrare che le funzioni di Hamilton H_j relative a X_j, $j = 1, 2, 3$ sono integrali primi del campo hamiltoniano X_H.