Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
8 Luglio 2016
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la trasformazione $\Psi\colon (p,q,t) \mapsto (P,Q,t)$ dipendente dai parametri reali A, B, a, b, definita da

$$\begin{cases} P = e^{-t}p + e^{t}q \\ Q = Ae^{at}p + Be^{bt}q, \end{cases}$$

dove $p, q, P, Q, t \in \mathbb{R}$.

1. Trovare tutti i valori di A, B, a, b con $A \neq 0$ che rendono Ψ canonica.
2. Assumendo che
$$a = -1, \quad b = 1, \quad A = 1, \quad B = 2,$$
estendere Ψ a una trasformazione canonica
$$\tilde{\Psi}\colon (p,e,q,t) \mapsto (P,\mathcal{E},Q,t),$$
dove P, Q sono date da Ψ, mentre $e, \mathcal{E}$ sono nuove variabili coniugate al tempo.

Esercizio 2. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo della retta reale. Denotiamo con X lo spazio lineare delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$-(a\dot{\eta})^{\cdot} + (c - \dot{b})\eta = 0, \tag{1}$$

dove $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni reali assegnate, con $a(t) > 0$ per ogni $t \in I$, ed $\eta : I \to \mathbb{R}$ è l'incognita.

Siano $\zeta_1, \zeta_2 \in X$. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ è una base di X se e solo se
$$W := \zeta_1\dot{\zeta}_2 - \zeta_2\dot{\zeta}_1 \neq 0, \qquad \text{per ogni } t \in I;$$
2. il prodotto aW è costante per ogni $t \in I$;
3. se $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ è una base di X allora tra due zeri consecutivi di ζ_1 giace esattamente uno zero di ζ_2, e viceversa.

Esercizio 3. Sia $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ l'insieme delle matrici a coefficienti reali 3×3 con l'operazione di commutazione $[\ ,\ ]$ definita da

$$[A, B] = AB - BA.$$

Sia inoltre $\mathscr{A}$ l'insieme delle funzioni reali $H \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ con coordinate $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$.

Consideriamo la mappa

$$\sigma \colon M_{\mathbb{R}}(3,3) \to \mathscr{A}$$

definita da

$$\sigma(A) = -\mathbf{q} \cdot A\mathbf{p}, \qquad A \in M_{\mathbb{R}}(3,3).$$

1. Dimostrare che

   $$\sigma([A,B]) = \{\sigma(A), \sigma(B)\} \qquad \text{per ogni } A, B \in M_{\mathbb{R}}(3,3),$$

   dove $\{\ ,\ \}$ indica le parentesi di Poisson.

2. Sia $\ell = \sigma|_{o(3)}$ la restrizione di σ all'insieme $o(3)$ delle matrici antisimmetriche e sia $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$. Identifichiamo $o(3)$ con $\mathbb{R}^3$ tramite l'isomorfismo

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

   Mostrare che

   $$\ell(\mathbf{a}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{a}.$$

3. Sia $H \in \mathscr{A}$, invariante per rotazioni, cioè

   $$H(R\mathbf{p}, R\mathbf{q}) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad \text{per ogni } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3).$$

   Mostrare che $\mathbf{L}$ è costante sulle soluzioni del sistema hamiltoniano associato a H.