Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

21 Luglio 2015

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Determinare due funzioni non costanti $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, tali che le relazioni

$$P(p,q) = pf(p) + q, \qquad Q(p,q) = qg(q) + \frac{p^2}{2}$$

definiscano una trasformazione canonica univalente su $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione di Lagrange

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}|^2 - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \qquad \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N},$$

dove

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}).$$

Ogni componente a_j del vettore $\mathbf{a}(\mathbf{q})$ è una funzione regolare che dipende solo dalla componente q_j di $\mathbf{q}$ (cioè $a_j = a_j(q_j), j = 1 \dots n$), e

$$V_0(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot M(\mathbf{q})\mathbf{q},$$

in cui $M(\mathbf{q})$ è una matrice di ordine n, con coefficienti di classe C^2, tale che per ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di una delle forme seguenti

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \overset{f}{\mapsto} q_1, q_2, \dots, q_n, q_1^2, q_2^2, \dots, q_n^2$$

esista una funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$M(\mathbf{q})\nabla f(\mathbf{q}) = \nabla g(\mathbf{q}).$$

1. Trovare l'espressione più generale per le componenti della matrice $M(\mathbf{q})$;
2. scrivere la funzione di Hamilton H associata a L;
3. scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi associata ad H e mostrare che le variabili $\mathbf{q}$ sono separabili.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi}) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi}), \qquad \mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{T}^2,$$

dove

$$h(\mathbf{I}) = \frac{1}{2}|\mathbf{I}|^2, \qquad f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi}) = |\boldsymbol{I}|^2 (\cos\phi_1)^2 (\sin\phi_2)^2.$$

Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi}) \overset{\boldsymbol{\Psi}}{\mapsto} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}})$$

tale che la hamiltoniana del sistema nelle variabili $(\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}})$ non dipenda da $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ al primo ordine in ϵ.