

## Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

18 Settembre 2015

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

**Esercizio 1.** Completare la relazione

$$Q = q^2 + p(1 + t^2)$$

ad una trasformazione canonica dipendente da  $t$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t).$$

Estendere poi tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso, con coordinate  $(p, e, q, t)$ .

**Esercizio 2.** Si consideri la hamiltoniana dell'oscillatore armonico piano

$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2),$$

con  $x, y, p_x, p_y \in \mathbb{R}$ . Posto

$$c(p_x, p_y, x, y) = xp_y - yp_x,$$

1. mostrare che  $H$  e  $c$  sono integrali primi in involuzione del sistema hamiltoniano definito da  $H$ ;
2. calcolare i flussi  $\Phi_H^t$  e  $\Phi_c^t$  dei campi hamiltoniani  $X_H$  e  $X_c$ ;
3. fissati due numeri reali  $\sigma, \tau > 0$  ed un intero  $n$ , calcolare le componenti di

$$\left[ \prod_{j=1}^n \Phi_H^\tau \circ \Phi_c^\sigma \right] (p_x, p_y, x, y),$$

dove  $\prod$  è il prodotto di composizione.

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \phi) = \frac{I^2}{2} + \epsilon I \cos^2 \phi, \quad I \in \mathbb{R}, \phi \in S^1.$$

1. Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \phi) \xrightarrow{\Psi} (\tilde{I}, \tilde{\phi})$$

tale che la hamiltoniana  $K_\epsilon$  del sistema nelle variabili  $(\tilde{I}, \tilde{\phi})$  non dipenda da  $\tilde{\phi}$  al primo ordine in  $\epsilon$ ;

2. scrivere il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton  $K_\epsilon$ .