

Corso di Istituzioni di Fisica Matematica

Secondo compito parziale

18 Dicembre 2014

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_2(H_1(p_1, q_1 + q_2), p_2 - p_1, q_2), \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}, \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}^+,$$

con $H_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $H_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni assegnate.

1) Si cerchi una trasformazione canonica

$$\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^+)^2 \ni (p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi_1} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^+)^2$$

per cui il sistema nelle nuove variabili abbia una hamiltoniana della forma

$$K(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = K_2(K_1(P_1, Q_1), P_2, Q_2)$$

con $K_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $K_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ da determinare.

2) Assumendo

$$H_1(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}, \quad H_2(x, y, z) = x + z\sqrt{y^2 + z^2}$$

si utilizzi il metodo di Hamilton-Jacobi per trovare una funzione generatrice di una trasformazione canonica

$$(P_1, P_2, Q_1, Q_2) \xrightarrow{\Psi_2} (\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2)$$

tale che i nuovi momenti η_1, η_2 siano costanti del moto della forma

$$\eta_j = F(P_j, Q_j), \quad j = 1, 2$$

per una stessa funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I, \phi) = h(I) + \epsilon f(I, \phi), \quad I \in \mathbb{R}^n, \phi \in \mathbb{T}^n$$

con

$$h(I) = \frac{1}{2}|I|^2, \quad f(I, \phi) = \sum_{j=1}^n I_j \cos(j\phi_j) + |I|^2 \cos^2\left(\sum_{j=1}^n \phi_j\right).$$

Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \phi) \xrightarrow{\Psi} (\tilde{I}, \tilde{\phi})$$

tale che la hamiltoniana del sistema nelle variabili $(\tilde{I}, \tilde{\phi})$ non dipenda da $\tilde{\phi}$ al primo ordine in ϵ .