Corso di Istituzioni di Fisica Matematica

Prova scritta del 9 Gennaio 2015

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si considerino i campi vettoriali in $\mathbb{R}^{2n}$

$$X = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, \qquad p, q \in \mathbb{R}^n.$$

i) Mostrare che X e Y sono hamiltoniani e trovare per ciascuno di essi una funzione di Hamilton;

ii) calcolare le parentesi di Lie $[X, Y]$ di X, Y;

iii) trovare la mappa a tempo $\tau \in \mathbb{R}$ fissato del flusso del campo vettoriale $[X, Y]$ e verificare che essa definisce una trasformazione canonica Ψ;

iv) scrivere i campi vettoriali X, Y nelle coordinate canoniche definite da Ψ.

Esercizio 2. Si considerino le relazioni

$$P = \frac{1}{2} x \cdot Ax + a \cdot x + \alpha, \qquad Q = \frac{1}{2} x \cdot Bx + b \cdot x + \beta, \qquad x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$A_{ij}, B_{ij}, a_h, b_h, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Assumendo $A, B \neq 0$, determinare le condizioni sui coefficienti $A_{ij}, B_{ij}, a_h, b_h, \alpha, \beta$ per cui le relazioni (1) definiscono una trasformazione canonica univalente $(p, q) \overset{\Psi}{\mapsto} (P, Q)$.[1] In particolare dire se esistono trasformazioni canoniche di questo tipo con A, B non degeneri.

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano in $\mathbb{R}^2$ con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(p, q) = H_0(p, q) + \epsilon H_1(p, q), \qquad p, q \in \mathbb{R},\ \epsilon \ll 1,$$

con

$$H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \qquad H_1 = pq.$$

1. Scrivere il sistema hamiltoniano corrispondente e la sua funzione di Hamilton $K_\epsilon(I, \phi)$ nelle variabili azione-angolo I, ϕ dell'oscillatore armonico con hamiltoniana H_0;[2]

2. determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità
$$(I, \phi) \overset{\Psi_\epsilon}{\mapsto} (\tilde{I}, \tilde{\phi})$$
tale che la hamiltoniana $\tilde{K}_\epsilon = K_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\phi}$ al primo ordine in ϵ.

3. Si scriva il sistema hamiltoniano nelle variabili $(\tilde{I}, \tilde{\phi})$ corrispondente allo sviluppo di Taylor di $\tilde{K}_\epsilon$ fino al secondo ordine in ϵ.

---

[1] *Suggerimento*: mostrare che la matrice A è necessariamente un multiplo di B.

[2] *Suggerimento*: usare l'equazione di Hamilton-Jacobi, scegliendo I in modo che H_0 si scriva ωI nelle variabili I, ϕ.