Parte I

Meccanica newtoniana

Capitolo 1

Sistemi meccanici discreti non vincolati

Vogliamo descrivere il moto di un sistema di punti materiali $P_1 \dots P_N$ dotati di masse $m_1 \dots m_N$, soggetti a forze esterne assegnate, che si possono muovere liberamente nello spazio ambiente.

1.1 Spazio, tempo e sistemi di riferimento

Spazio e tempo

Il tempo è reale e unidimensionale; lo spazio ambiente è euclideo tridimensionale e lo denotiamo con $\mathbb{E}^3$.

$\mathbb{E}^3$ è dunque uno spazio affine reale, con spazio vettoriale associato $\mathbb{V}^3$ dotato di un prodotto scalare, che denotiamo con $\cdot$, cioè di una forma bilineare simmetrica definita positiva $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}$. Possiamo quindi introdurre la norma

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}}, \qquad \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$$

e la distanza

$$d(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = |\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}|, \qquad \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}^3.$$

Introduciamo anche lo spazio prodotto $\mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$, che chiamiamo **spazio-tempo di Galileo**. Gli elementi di $\mathbb{G}$ si chiamano eventi. Inoltre $\mathbb{G}$ ha la struttura di un fibrato banale, avente per base la retta del tempo $\mathbb{R}$, mentre le fibre sono gli spazi degli eventi simultanei $\mathbb{E}^3 \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, tutti isomorfi a $\mathbb{E}^3$. La struttura euclidea su $\mathbb{E}^3$ permette di misurare le distanze tra eventi simultanei usando questo isomorfismo.

Prodotto vettoriale

Introduciamo un **prodotto vettoriale** (o prodotto vettore) su $\mathbb{V}^3$, denotato con $\times$, che è un'applicazione $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ bilineare, antisimmetrica, tale che

i) se $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$ allora $|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}| = |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|$,
ii) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$,

per ogni $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}^3$.

Sullo spazio $\mathbb{V}^3$, dotato del prodotto scalare $\cdot$, esistono 2 prodotti vettoriali $\times_1, \times_2$, il cui risultato differisce solo per il segno e, scelta una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, risulta

$$\begin{array}{lll} \hat{\mathbf{e}}_1 \times_1 \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, & \hat{\mathbf{e}}_2 \times_1 \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, & \hat{\mathbf{e}}_3 \times_1 \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2, \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \times_2 \hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\mathbf{e}}_3, & \hat{\mathbf{e}}_2 \times_2 \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_1, & \hat{\mathbf{e}}_3 \times_2 \hat{\mathbf{e}}_1 = -\hat{\mathbf{e}}_2. \end{array} \tag{1.1}$$

Assumiamo che un'operazione con le proprietà del prodotto vettore sopra elencate esista. Allora, data una base ortornormale $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ di $\mathbb{V}^3$, dalla proprietà antisimmetrica abbiamo

$$\hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_j = \vec{\mathbf{0}}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Dalle i), ii) segue che $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$ sta in $\hat{\mathbf{e}}_1^\perp \cap \hat{\mathbf{e}}_2^\perp = \mathrm{span}(\hat{\mathbf{e}}_3)$ e che $|\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2| = 1$, quindi

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \pm\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Inoltre, dalla ii) segue che se $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = +\hat{\mathbf{e}}_3$ si ha

$$\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \qquad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2.$$

Se invece $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = -\hat{\mathbf{e}}_3$ si ha

$$\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_1, \qquad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = -\hat{\mathbf{e}}_2.$$

Viceversa, le due applicazioni bilineari e antisimmetriche $\times_1, \times_2$ definite dalle (1.1) soddisfano le proprietà i), ii).

Esercizio 1. *Verificare l'affermazione precedente.*

Scelto uno dei due prodotti vettoriali su $\mathbb{V}^3$, che indichiamo con $\times$, diciamo che una base ortonormale ordinata $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ è **levogira** se vale

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \qquad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2.$$

Nel seguito considereremo solo terne levogire.

Vale la seguente proprietà (formula del prodotto triplo):

$$(\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}) \times \vec{\mathbf{z}} = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{z}})\, \vec{\mathbf{y}} - (\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{z}})\, \vec{\mathbf{x}}\,. \tag{1.2}$$

Esercizio 2. *Verificare la (1.2).*

Notiamo che il prodotto vettoriale non è associativo, infatti dalla formula del prodotto triplo e dalla proprietà antisimmetrica otteniamo

$$(\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}) \times \vec{\mathbf{z}} - \vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\mathbf{y}} \times \vec{\mathbf{z}}) = (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}})\, \vec{\mathbf{z}} - (\vec{\mathbf{y}} \cdot \vec{\mathbf{z}})\, \vec{\mathbf{x}}$$

che in generale è non nullo.

Introduciamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{h=1}^{3} x_h y_h, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)\ .$$

La mappa

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}\times\mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3,$$

con $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$, definisce un prodotto vettore su $\mathbb{R}^3$ tale che $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è una terna levogira. Tale prodotto vettore soddisfa la cosiddetta *regola della mano destra* o *regola del cacciavite*.

Sistemi di riferimento

La descrizione del moto di un corpo richiede l'introduzione di un sistema di riferimento, che permetta di individuare la posizione del corpo nello spazio ambiente in cui avviene il moto.

Un **sistema di riferimento** in $\mathbb{E}^3$ è una mappa differenziabile

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Sigma(t) = \{O(t), \hat{\mathbf{e}}_1(t), \hat{\mathbf{e}}_2(t), \hat{\mathbf{e}}_3(t)\} \in \mathbb{E}^3 \times (\mathbb{V}^3)^3,$$

con $O \in \mathbb{E}^3, \hat{\mathbf{e}}_j \in \mathbb{V}^3, j = 1,2,3$, tale che

$$\hat{\mathbf{e}}_i(t)\cdot\hat{\mathbf{e}}_j(t) = \delta_{ij} \qquad \forall i,j,\ \forall t.$$

Inoltre $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ formano una terna levogira. Per Σ useremo anche la notazione $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, oppure $Oxyz$.

Rappresentazione in coordinate

Dato $P \in \mathbb{E}^3$ ed un sistema di riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, possiamo associare in modo unico a tale punto un vettore di coordinate in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{E}^3 \ni P \longleftrightarrow \vec{\mathbf{x}}_P = (P - O) = \sum_{i=1}^{3} x_i\hat{\mathbf{e}}_i \in \mathbb{V}^3 \longleftrightarrow \mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \tag{1.3}$$

Denoteremo con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, corrispondenti a $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. In seguito, nella scrittura delle formule, utilizzeremo sia la notazione in $\mathbb{V}^3$ che quella in coordinate in $\mathbb{R}^3$.

Fissato un sistema di riferimento in $\mathbb{E}^3$ possiamo identificare $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ con lo spazio delle coordinate di Galileo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

1.2 Descrizione del moto

Il moto di un punto $P \in \mathbb{E}^3$ è una mappa differenziabile

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3.$$

Dato un sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, possiamo definire la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relativamente a Σ rispettivamente come

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{x}}_P = (P-O) &= \sum_{i=1}^{3} x_i\,\hat{\mathbf{e}}_i,\\
\vec{\mathbf{v}}_P = \frac{d}{dt}(P-O)\Big|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\,\hat{\mathbf{e}}_i,\\
\vec{\mathbf{a}}_P = \frac{d^2}{dt^2}(P-O)\Big|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i\,\hat{\mathbf{e}}_i
\end{aligned}$$

e possiamo identificarle tramite la (1.3) con i rispettivi vettori delle loro coordinate in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x}_P = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad \mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{x}}_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) \in \mathbb{R}^3.$$

L'operazione di derivata temporale di una mappa vettoriale dipende dalla base in cui si scrivono le componenti e quindi, per i sistemi meccanici, dalla scelta del riferimento. Utilizzeremo la notazione $\frac{d}{dt}(\cdot)\big|_\Sigma$ per indicare esplicitamente tale dipendenza.

1.3 Le equazioni del moto

Dato un sistema di N punti materiali e fissato un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ assumiamo che la forza agente sul punto P_i sia esprimibile da una mappa

$$\vec{\mathbf{F}}_i : (\mathbb{V}^3)^N \times (\mathbb{V}^3)^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{V}^3$$

che dipende solo dalla posizione e dalla velocità dei punti del sistema e dal tempo t, quindi

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N, \vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N, t).$$

Vale il **principio di sovrapposizione**, cioè i contributi di due forze agenti su uno stesso punto si sommano vettorialmente.

Osserviamo che le forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ dipendono dal sistema di riferimento scelto, vedi Sezione 2.

Il determinismo di Laplace e le equazioni di Newton

Il principio del **determinismo meccanicistico** dice che la conoscenza dello stato cinetico (posizioni e velocità) di un sistema di N punti materiali ad un certo istante permette di determinare tutta la sua evoluzione temporale.

Dato un sistema formato dai punti $P_i, i = 1 \dots N$, soggetti alle forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ nel sistema di riferimento Σ, assumiamo che valgano le equazioni di Newton (*secondo principio della Dinamica*). Più precisamente, siano

$$\vec{\mathbf{x}} = (\vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_N) \,, \quad \vec{\mathbf{v}} = (\vec{\mathbf{v}}_1, \dots, \vec{\mathbf{v}}_N) \,, \in (\mathbb{V}^3)^N$$

i vettori delle posizioni e velocità degli N punti. Se

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t)$$

è la forza agente sul punto P_i, $i = 1 \dots N$, allora si assume che il moto $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ sia soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{\mathbf{x}}_i \Big|_{\Sigma} = \vec{\mathbf{F}}_i(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}, t) \qquad i = 1, \dots, N, \tag{1.4}$$

oppure, in coordinate in $\mathbb{R}^3$,

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \qquad i = 1, \dots, N. \tag{1.5}$$

1.4 I riferimenti inerziali

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

Fissato un sistema di riferimento, chiamiamo **gruppo di Galileo** il gruppo $\mathcal{G}$ delle trasformazioni affini dello spazio delle coordinate di Galileo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ che conservano gli intervalli di tempo e la distanza tra eventi simultanei.

Proposizione 1. *Ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ si scrive in modo unico come prodotto di trasformazioni del tipo seguente:*

i) $g_1(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{u}, t)$ *(moto uniforme con velocità* $\mathbf{u}$*)*
ii) $g_2(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s)$ *(traslazione dell'origine)*
iii) $g_3(\mathbf{x}, t) = (G\mathbf{x}, t)$ *(isometria spaziale)*

con $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in O(3)$.

Dimostrazione. Consideriamo una trasformazione affine $\mathbf{\Phi}$ di $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ in sé:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{\Phi}}{\mapsto} A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix} + \mathbf{B} \,,$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ s \end{pmatrix}, \quad G \in \mathcal{M}(3,3), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad a, s \in \mathbb{R} \,.$$

Mostriamo che se $\mathbf{\Phi}$ è una trasformazione del gruppo $\mathcal{G}$ si ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $a = 1$, $G \in O(3)$. Da questo seguirà la tesi. L'invarianza degli intervalli di tempo ci dice che

$$|\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + a(t_1 - t_2)| = |(t_1 - t_2)|$$

per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Da questo segue che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $|a| = 1$. Per conservare anche il verso del tempo si deve scegliere $a = 1$. L'invarianza della distanza tra eventi simultanei $(\mathbf{x}_1, t)$, $(\mathbf{x}_2, t)$ ci dà

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = |G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)|$$

per ogni $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, da cui segue che $G \in O(3)$.

□

$\mathcal{G}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio delle trasformazioni affini di $\mathbb{A}^4$ di dimensione 10. Siccome vogliamo conservare l'orientazione dello spazio data dalla scelta del riferimento, ci restringeremo alle trasformazioni con $G \in SO(3)$.

Principio di relatività di Galileo

Dato un sistema di N punti materiali possiamo estendere in modo naturale l'azione del gruppo di Galileo allo **spazio degli stati** $(\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R}$ definendo l'azione dei generatori g_1, g_2, g_3 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (\mathbf{x} + t\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}, t + s) \\ g_3(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= (G\mathbf{x}_1, \dots, G\mathbf{x}_N, G\mathbf{v}_1, \dots, G\mathbf{v}_N, t) \end{aligned}$$

con $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in (\mathbb{R}^3)^N, \boldsymbol{\xi} = (\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}), \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}), \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in SO(3)$.

Definizione 1. *Diciamo che un sistema di riferimento è* **inerziale** *se le equazioni di Newton (1.5) in questo riferimento sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo di Galileo* $\mathcal{G}$.[1]

L'invarianza delle equazioni di Newton significa che, data una soluzione $t \to \mathbf{x}(t)$ di queste equazioni, un elemento di $g \in \mathbb{G}$ la trasforma in un'altra soluzione.

Osserviamo che anche la meccanica relativistica è deterministica: la meccanica classica si distingue da essa per il principio di relatività galileiano.

Definizione 2. *Il principio di relatività di Galileo afferma che esistono dei riferimenti inerziali.*

In un riferimento inerziale il principio di relatività di Galileo impone dei vincoli sulla forma delle forze:

[1]in realtà noi considereremo solo le trasformazioni in cui $G \in SO(3)$ perché vogliamo che preservino l'orientazione di $\mathbb{E}^3$

a) invarianza per traslazioni del tempo: se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione di (1.5) anche $\mathbf{x}(t+s)$ lo è (le leggi della natura restano le stesse al passare del tempo). Ne segue che le $\mathbf{F}_i$ non dipendono da t:
$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$
b) invarianza per traslazioni uniformi nello spazio $\mathbb{E}^3$: se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione anche $\mathbf{x}(t) + t\mathbf{v} + \mathbf{y}$ lo è (lo spazio è omogeneo). Ne segue che
$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k)$$
cioè le forze dipendono solo dalle distanze e dalle velocità relative.
c) invarianza per rotazioni nello spazio $\mathbb{E}^3$: se $\mathbf{x}(t)$ è soluzione anche $(G\mathbf{x}_1(t), \ldots, G\mathbf{x}_N(t))$ lo è, per ogni $G \in SO(3)$ (lo spazio è isotropo), e si ha la relazione
$$\mathbf{F}_i(G\mathbf{x}_1, \ldots, G\mathbf{x}_N, G\mathbf{v}_1, \ldots, G\mathbf{v}_N) = G\mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

In particolare, se il sistema consiste di un solo punto, il suo moto in ogni sistema di riferimento inerziale è rettilineo uniforme, infatti per a), b) la forza non dipende da $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}$, quindi è costante; per c) essa è invariante per rotazioni, quindi è nulla. Questo ci dà il primo principio della Dinamica, detto anche **principio di inerzia** e già noto a Galileo.

1.5 Sistemi meccanici

Definizione 3. *Consideriamo un insieme di N punti materiali, $P_i, i = 1 \ldots N$, di masse m_i, su cui agiscono delle forze $\vec{\mathbf{F}}_i$ assegnate a priori in un sistema di riferimento Σ. Diciamo che questo è un* **sistema meccanico classico** *(discreto, non vincolato) se il moto dei punti soddisfa le equazioni di Newton (1.5). Se vale anche il principio di relatività di Galileo parleremo di sistema meccanico galileiano.*

Facciamo alcune osservazioni:

1. il fatto che valga il principio di relatività implica che il moto del sistema può essere studiato in un riferimento inerziale;
2. per introdurre un sistema meccanico dobbiamo specificare un sistema di riferimento, in quanto le forze in gioco dipendono da esso.

Nei sistemi che considereremo il principio di relatività può essere violato. L'esempio più semplice è quello della caduta di un grave, cioè, fissato un riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, il moto di un punto materiale di massa m soggetto alla forze di gravità $-mg\hat{\mathbf{e}}_3$. È evidente la mancanza di invarianza per rotazione dell'equazione del moto: la direzione della gravità è privilegiata. Questo si spiega perché il principio di relatività vale per **sistemi isolati**. In questo semplice modello matematico stiamo considerando il punto materiale in un campo di forze esterno (quello della gravità), quindi non è un sistema isolato. Potremmo anche usare un modello diverso, più complesso, includendo la Terra nel sistema, ma ai fini di fare predizioni per questo problema spesso basta impostare il problema nel modo più semplice.

Parleremo comunque di un sistema meccanico distinguendo tra forze interne e forze esterne (vedi Sezione 3.2), essendo le prime prodotte dall'interazione tra i punti del sistema.

1.6 Dinamica di un punto materiale P

Consideriamo un punto materiale P di massa m su cui agisce una forza $\vec{\mathbf{F}}$ nel sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$. Siano $\vec{\mathbf{x}}_P, \vec{\mathbf{v}}_P, \vec{\mathbf{a}}_P$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relative a Σ. Denoteremo le coordinate in $\mathbb{R}^3$ delle rispettive quantità con gli stessi simboli ma senza il simbolo di vettore '$\rightarrow$'.

Nella descrizione del moto di P saranno utili le seguenti quantità:

Quantità di moto (o momento lineare)

$$\vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{v}}_P$$

Momento Angolare rispetto a un polo $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = (P - Q) \times m\vec{\mathbf{v}}_P$$

Energia cinetica[2]

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{\mathbf{v}}_P|^2$$

Momento della forza $\mathbf{F}$ rispetto a un polo $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = (P - Q) \times \vec{\mathbf{F}}$$

Potenza della forza $\vec{\mathbf{F}}$

$$\Pi = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_P$$

Lavoro elementare all'instante t della forza $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}_P, \vec{\mathbf{v}}_P, t)$

$$\delta\mathcal{L} = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}_P$$

Consideriamo il caso di una forza posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$. Per essa il lavoro elementare è una 1–forma differenziale su $\mathbb{R}^3$. Se tale forma è esatta ed $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è il suo potenziale possiamo definire la seguente quantità:

Energia potenziale

$$V = -U$$

[2]la quantità $m|\vec{\mathbf{v}}_P|^2$ è stata introdotta da Leibniz con il nome di *vis viva*.

Un campo di forze posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ che ammette un potenziale si dice **conservativo**. In tal caso, se $V(\mathbf{x}_P)$ è l'energia potenziale, si ha

$$\delta\mathcal{L} = -dV, \qquad \mathbf{F} = -\nabla V$$

e si definisce
ENERGIA TOTALE

$$E = T + V$$

ESEMPI DI FORZE CONSERVATIVE:

1) $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -mg\mathbf{e}_3$ (forza peso)

$$V(\mathbf{x}) = mgx_3, \qquad \nabla V(\mathbf{x}) = mg\mathbf{e}_3 = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

2) $\mathbf{F} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$, $\rho = |\mathbf{x}|$, (forza centrale a simmetria sferica)

$$V(\mathbf{x}) = -\int f(\rho)\, d\rho, \qquad \nabla V(\mathbf{x}) = -f(\rho)\nabla\rho = -f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

1.7 Equazioni di bilancio e leggi di conservazione

Consideriamo un punto materiale P di massa m con coordinate $\mathbf{x}_P$, su cui agisca una forza $\mathbf{F}$.

Proposizione 2. *Sia $t \to \mathbf{x}_P(t)$ una soluzione dell'equazione di Newton $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_P$. Allora valgono le relazioni*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \tag{1.6}$$

e, per ogni punto $Q \in \mathbb{E}^3$,

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - m\,\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_P. \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Basta calcolare la derivata totale di $\mathbf{p}$ e di $\mathbf{M}_Q$, cioè la derivata temporale lungo una qualunque soluzione di $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_P$.

□

Proposizione 3. *(teorema dell'energia cinetica) Sia $t \to \mathbf{x}_P(t)$ una soluzione dell'equazione di Newton $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_P$. Allora*

$$\dot{T} = \Pi.$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_P = m\mathbf{a}_P\cdot\mathbf{v}_P = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_P\cdot\mathbf{v}_P) = \dot{T}.$$

□

Proposizione 4. *Valgono le seguenti leggi di conservazione*

1) *se la componente di* $\mathbf{F}$ *nella direzione* $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ *è nulla allora* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}$ *si conserva durante il moto;*
2) *se il momento della forza* $\mathbf{F}$ *rispetto ad un polo* Q *in quiete (nel riferimento in cui si studia il moto) ha componente nulla nella direzione* $\mathbf{e}$ *allora* $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$ *si conserva durante il moto.*

Dimostrazione. Basta moltiplicare scalarmente per $\mathbf{e}$ le relazioni (1.6), (1.7).

$\square$

Ad esempio, per un punto materiale soggetto alla forza peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_3$ si conservano $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}_3$ rispetto ad ogni polo fisso Q.

La quantità $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{e}$ si chiama anche **momento assiale** relativo alla retta $Q\mathbf{e} = \{Q + \lambda\vec{\mathbf{e}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ (passante per Q e avente la direzione di $\mathbf{e}$) e non cambia scegliendo come polo un punto qualunque su tale retta.

Proposizione 5. *(conservazione dell'energia) Se il campo di forze* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P)$ *è conservativo, con energia potenziale* $V(\mathbf{x}_P)$*, allora l'energia totale* $E = T + V$ *è un integrale primo.*

Dimostrazione.

$$\dot{T}(\mathbf{x}_P, \mathbf{v}_P) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{v}_P = -\nabla V(\mathbf{x}_P) \cdot \mathbf{v}_P = -\dot{V}(\mathbf{x}_P) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0.$$

$\square$

Capitolo 2

Sistemi di riferimento in moto relativo

Consideriamo due sistemi di riferimento

$$\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad \Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$$

nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$. Le terne di vettori $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ e $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ dei sistemi di riferimento formano due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dello spazio vettoriale $\mathbb{V}^3$ associato ad $\mathbb{E}^3$. Pertanto, dato un vettore $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$ esistono uniche le rappresentazioni in tali basi

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^{3} u_h\,\hat{\mathbf{e}}_h\,, \qquad \vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^{3} u'_h\,\hat{\mathbf{e}}'_h\ .$$

Abbiamo già osservato che le derivate temporali delle mappe vettoriali, come la velocità di un punto materiale, dipendono dal sistema di riferimento scelto. Definiamo le derivate temporali di $\vec{\mathbf{u}}$ nei sistemi di riferimento Σ e Σ' come

$$\left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^{3} \dot{u}_h\,\hat{\mathbf{e}}_h\,, \qquad \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} = \sum_{h=1}^{3} \dot{u}'_h\,\hat{\mathbf{e}}'_h\ .$$

Velocità angolare e formule di Poisson

Dati due sistemi di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3\,, \Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$, ad ogni istante t esiste un'unica mappa vettoriale $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \in \mathbb{V}^3$ detta velocità angolare di Σ' rispetto a Σ, tale che

$$\left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt}\right|_{\Sigma} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_h\,, \qquad h = 1, 2, 3\ . \tag{2.1}$$

Le relazioni (2.1) si chiamano **formule di Poisson**.

Dimostrazione. Considero la matrice $R \in SO(3)$ di cambiamento di base da $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ a $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$, con componenti $R_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j,\ i, j = 1, 2, 3$. Il vettore

$$\left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt}\right|_{\Sigma}$$

è rappresentato da $\dot{\mathbf{e}}'_h \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$. Dalle relazioni $\mathbf{e}'_h = R\mathbf{e}_h$, $R^TR = I$ si ottiene

$$\dot{\mathbf{e}}'_h = \dot{R}R^TR\mathbf{e}_h = \dot{R}R^T\mathbf{e}'_h = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}'_h$$

per $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^3$, infatti $\dot{R}R^T$ è antisimmetrica, come si vede derivando $RR^T = I$ rispetto a t. Data una matrice antisimmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

possiamo associare a questa il vettore $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3$ attraverso l'equazione

$$A\mathbf{u} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}\,, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3\ .$$

Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^3 \Omega_h \hat{\mathbf{e}}_h \in \mathbb{V}^3$, rappresentato da $\mathbf{\Omega}$ in $\mathcal{B}$, è la velocità angolare. Infatti se $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ rappresentano $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ in $\mathcal{B}$, allora $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ è rappresentato da $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\begin{gathered} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i \times \sum_{j=1}^3 b_j \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \\ \sum_{1 \le i < j \le 3} (a_i b_j - a_j b_i) \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{h=1}^3 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_h \hat{\mathbf{e}}_h\ . \end{gathered} \tag{2.2}$$

L'unicità si dimostra per assurdo. Se esistessero $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1, \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ che soddisfano le (2.1), allora $(\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 - \vec{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \hat{\mathbf{e}}'_h = \vec{\mathbf{0}}$, $h = 1, 2, 3$. Quindi $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$.

□

Una formula esplicita per la velocità angolare è data da

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times \left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt}\right|_\Sigma \tag{2.3}$$

infatti, usando le formule di Poisson,

$$\sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times \left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}'_h}{dt}\right|_\Sigma = \sum_{h=1}^3 \hat{\mathbf{e}}'_h \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_h) = \sum_{h=1}^3 [\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{e}}'_h)\hat{\mathbf{e}}'_h] = 2\vec{\boldsymbol{\omega}}\ .$$

Esempio 1. *Siano $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, $\Sigma' = O\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ due sistemi di riferimento con lo stesso origine O. Assumiamo che Σ' ruoti attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_3$ di Σ in modo che i vettori $\hat{\mathbf{e}}'_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_1$ formino un angolo $\theta(t)$. Calcoliamo la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ.*

Abbiamo che

$$\hat{\mathbf{e}}'_1 = \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_2\,, \quad \hat{\mathbf{e}}'_2 = -\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_2\,, \quad \hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}_3\ . \tag{2.4}$$

Derivando le (2.4) rispetto a t ed applicando (2.3) si ottiene che

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_3$$

Velocità e accelerazione relative a riferimenti diversi

Data una mappa vettoriale differenziabile $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{V}^3$, vale la relazione

$$\left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{u}} \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Osservo innanzitutto che

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_i u_i'\hat{\mathbf{e}}_i' = \sum_i u_i' \sum_j R_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_j \Big(\sum_i u_i' R_{ji}\Big)\hat{\mathbf{e}}_j.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} &= \sum_j \frac{d}{dt}\Big(\sum_i u_i' R_{ji}\Big)\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_j \sum_i \Big(\dot{u}_i' R_{ji} + u_i' \dot{R}_{ji}\Big)\hat{\mathbf{e}}_j = \\
&= \sum_i \dot{u}_i' \Big(\sum_j R_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j\Big) + \sum_i u_i' \sum_j \dot{R}_{ji}\hat{\mathbf{e}}_j = \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \sum_i u_i' \left.\frac{d\hat{\mathbf{e}}_i'}{dt}\right|_{\Sigma} = \\
&= \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \sum_i u_i' \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}_i' = \left.\frac{d\vec{\mathbf{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{u}}.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 1. *Dalla (2.5) segue che la derivata temporale di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ in Σ ed in Σ' coincidono.*

In coordinate nella base $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{u}} = R\dot{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{u}'$$

dove $R \in SO(3)$, $R\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_h'$. Analogamente, in coordinate nella base $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}_1', \hat{\mathbf{e}}_2', \hat{\mathbf{e}}_3'\}$ abbiamo

$$R^T\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{u}' \ .$$

dove $\boldsymbol{\omega}' = R^T\boldsymbol{\omega}$.

Composizione di velocità angolari

Considero tre sistemi di riferimento in $\mathbb{E}^3$:

$$\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3\,; \qquad \Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}_1'\hat{\mathbf{e}}_2'\hat{\mathbf{e}}_3'\,; \qquad \Sigma'' = O''\hat{\mathbf{e}}_1''\hat{\mathbf{e}}_2''\hat{\mathbf{e}}_3''\,.$$

Se $\vec{\boldsymbol{\omega}}'$ è la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ e se $\vec{\boldsymbol{\omega}}''$ è la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ', allora la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ di Σ'' rispetto a Σ è data dalla somma $\vec{\boldsymbol{\omega}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}}''$.

Dimostrazione. Usando la (2.5) e le formule di Poisson si ha, per $h = 1, 2, 3$,

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}''_h = \frac{d\hat{\mathbf{e}}''_h}{dt}\bigg|_\Sigma = \frac{d\hat{\mathbf{e}}''_h}{dt}\bigg|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}}' \times \hat{\mathbf{e}}''_h = (\vec{\boldsymbol{\omega}}'' + \vec{\boldsymbol{\omega}}') \times \hat{\mathbf{e}}''_h \,.$$

Si conclude usando l'unicità della velocità angolare.

□

Possiamo allora scrivere due formule, che legano la velocità $\vec{\mathbf{v}}$ e l'accelerazione $\vec{\mathbf{a}}$ di un punto materiale P in un sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ a quelle calcolate relativamente ad un altro riferimento $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$, in moto con velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ rispetto a Σ, denotate con $\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{a}}'$ rispettivamente.

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}^T \,, \qquad \vec{\mathbf{v}}^T = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') \tag{2.6}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}}^T + \vec{\mathbf{a}}^C \,, \quad \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')) + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times (P - O') \,, \quad \vec{\mathbf{a}}^C = 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}' \tag{2.7}$$

Per ricavare le formule precedenti scriviamo

$$P - O = (P - O') + (O' - O) \,.$$

Derivando rispetto a t in Σ e usando (2.5) si ha

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \frac{d(P - O')}{dt}\bigg|_\Sigma = \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \frac{d(P - O')}{dt}\bigg|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')$$

da cui segue (2.6). Derivando ancora si ottiene[1]

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \frac{d^2(P - O')}{dt^2}\bigg|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}' + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times (P - O') + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')) + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}' \,,$$

da cui segue (2.7).

I termini $\vec{\mathbf{a}}^T$ e $\vec{\mathbf{a}}^C$ si chiamano rispettivamente **accelerazione di trascinamento** e **accelerazione di Coriolis**. Il termine $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O'))$ si chiama **accelerazione centripeta**. In coordinate nella base $\mathcal{B}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= R\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'} \,, \\
\dot{\mathbf{x}} &= R\dot{\mathbf{x}}' + \dot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' \,, \\
\ddot{\mathbf{x}} &= R\ddot{\mathbf{x}}' + \ddot{\mathbf{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\mathbf{x}' + 2\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\mathbf{x}}'
\end{aligned}$$

in cui $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ è il vettore delle coordinate di $(P - O')$ in $\mathcal{B}'$.

[1] usiamo la relazione $\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})\big|_\Sigma = \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{u}}\big|_\Sigma \times \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \times \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{v}}\big|_\Sigma$, che segue dalla (2.2).

2.1 Equazione del moto in riferimenti diversi

Se l'equazione del moto di un punto materiale P di massa m in un riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ si scrive

$$m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}(P-O, \vec{\mathbf{v}}, t)$$

allora, nel riferimento $O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ possiamo scrivere

$$m\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}}((P-O')+(O'-O), \vec{\mathbf{v}}'+\vec{\mathbf{v}}^T, t) - m\vec{\mathbf{a}}^T - m\vec{\mathbf{a}}^C \ .$$

In coordinate nella base $\mathcal{B}$ l'ultima equazione diventa

$$mR\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(R\mathbf{x}'+\mathbf{x}_{O'}, R\dot{\mathbf{x}}'+\dot{\mathbf{x}}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}') - m(\ddot{\mathbf{x}}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{x}')+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times R\mathbf{x}') - 2m\boldsymbol{\omega}\times R\dot{\mathbf{x}}' \ .$$

2.2 Deviazione dei gravi in caduta libera

Considero il moto di un punto materiale P studiato in un sistema di riferimento solidale alla Terra, assumendo che questa abbia forma sferica e che ruoti attorno ad una direzione fissa con velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ costante. Dato un sistema di riferimento $\Sigma' = O'xyz$ solidale alla Terra l'accelerazione relativa è data da

$$\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}}^T - \vec{\mathbf{a}}^C$$

dove

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}} \,, \qquad \vec{\mathbf{a}}^T = \vec{\mathbf{a}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P-O'))\,, \qquad \vec{\mathbf{a}}^C = 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}' \ .$$

Inoltre $\vec{\mathbf{a}}_{O'} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O'-C))$, dove C è il centro della Terra. Siccome $P-O'$ è molto più piccolo di $O'-C$ posso trascurare il termine $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P-O'))$ quindi

$$\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{g}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O'-C)) - 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}' \ .$$

Poniamo

$$\vec{\mathbf{g}}_{O'} = \vec{\mathbf{g}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O'-C))\,;$$

questo mi dà la gravità locale. Possiamo orientare Σ' nel modo seguente: scelgo l'asse $O'z$ lungo la direzione della gravità locale, l'asse $O'x$ parallelo al piano del meridiano, verso l'equatore, e l'asse $O'y$ in modo tale che $O'xyz$ sia levogira.

Approssimiamo la gravità locale con $\vec{\mathbf{g}}$. Indicando con λ la latitudine di O' e passando in in coordinate ottengo il sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x} = 2\omega\sin\lambda\dot{y}\,, \quad \ddot{y} = -2\omega\sin\lambda\dot{x} - 2\omega\cos\lambda\dot{z}\,, \quad \ddot{z} = -g + 2\omega\cos\lambda\dot{y} \tag{2.8}$$

e scelgo le condizioni iniziali

$$x(0) = y(0) = z(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \ .$$

La soluzione di questo sistema di equazioni differenziali lineari si può scrivere esplicitamente, comunque otterremo un risultato qualitativo facendo un approssimazione. Integrando la prima e la terza equazione in (2.8) e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\ddot{y} = -4\omega^2 y + 2g\omega t \cos\lambda \ .$$

Trascurando il termine con ω^2 e integrando si ottiene

$$y(t) = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\lambda \ .$$

Questa formula ci dà la deviazione verso Est del grave in caduta libera.

Capitolo 3

Dinamica dei sistemi di N punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali P_i di massa m_i, $i = 1, .., N$, su cui agiscono le forza $\vec{\mathbf{F}}_i$ nel sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$. Siano $\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{a}}_i$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P_i relative a Σ e $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$ le loro coordinate. Introduciamo le seguenti quantità, utili a descrivere la dinamica degli N punti nel loro insieme:

Quantità di moto totale (momento lineare)

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\mathbf{v}}_j$$

Momento Angolare rispetto a un polo Q

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \sum_{j=1}^{N} (P_j - Q) \times m_j \vec{\mathbf{v}}_j$$

Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j |\vec{\mathbf{v}}_j|^2$$

Risultante delle forze $\mathbf{F}_j$

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j$$

Momento risultante delle forze $\mathbf{F}_j$ rispetto a un polo Q

$$\vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_{j=1}^{N} (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_j$$

Potenza risultante delle forze $\vec{\mathbf{F}}_j$

$$\Pi = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j \cdot \vec{\mathbf{v}}_j$$

Lavoro elementare all'instante t delle forze $\vec{\mathbf{F}}_j$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j \cdot d\vec{\mathbf{x}}_j$$

3.1 Teoremi di scomposizione relativi al baricentro

Introduciamo la massa totale

$$m = \sum_{j=1}^{N} m_j$$

e le coordinate del baricentro $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^3$, definite da

$$m(B-O) = \sum_{j=1}^{N} m_j(P_j - O). \tag{3.1}$$

Definizione 4. *Dato un sistema di N punti materiali e fissato un sistema di riferimento Σ, il* **riferimento del baricentro** *è il sistema di riferimento Σ' centrato in B ed orientato come Σ.*

Rappresentazione della quantità di moto

Dalla (3.1) segue subito che la quantità di moto totale corrisponde a quella di un punto avente massa totale m, che si muove come il baricentro del sistema:

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j = m\mathbf{v}_B. \tag{3.2}$$

Proposizione 6. *(teorema del centro di massa) Il baricentro di un sistema di N punti si muove come un punto materiale di massa m su cui agisce la risultante* $\mathbf{R}$ *delle forze che agiscono sui singoli punti:*

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{R}. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Sia $t \to (\mathbf{x}_1(t) \ldots \mathbf{x}_N(t))$ una soluzione delle equazioni di Newton (1.5). Derivando (3.2) si ottiene

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j.$$

□

Scomposizione del momento angolare rispetto a un polo Q

Il momento angolare totale rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{M}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{M}^{(B)}, \quad \mathbf{M}^{(B)} = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B). \quad (3.4)$$

La prima corrisponde al momento angolare rispetto a Q di un punto di massa m che si muove come il baricentro del sistema. La seconda, cioè $\mathbf{M}^{(B)}$, corrisponde al momento angolare nel sistema nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo Q.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_Q &= \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m_j \mathbf{v}_j = \\
&= \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_j + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m\mathbf{v}_B.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{v}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{v}_B = 0,$$

da cui segue la (3.4).

□

Osservazione 2. *Se scriviamo $\mathbf{M}_Q$ nel riferimento del baricentro il primo addendo in (3.4) si annulla. Quindi in tale riferimento il momento angolare non dipende dalla scelta del polo.*

Scomposizione del momento risultante delle forze rispetto a un polo Q

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R} + \mathbf{N}^{(B)}, \quad \mathbf{N}^{(B)} = \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_B) \tag{3.5}$$

la prima corrisponde al momento della forza risultante $\mathbf{R}$ rispetto a Q, agente sul baricentro B del sistema, la seconda, cioè $\mathbf{N}^{(B)}$, corrisponde al momento risultante delle forze nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo Q.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{F}_j = \\ &= \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{F}_j + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \mathbf{a}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B) \times \mathbf{a}_B = 0$$

da cui segue la (3.5).

□

Osservazione 3. *Se scriviamo $\mathbf{N}_Q$ nel riferimento del baricentro il primo addendo in (3.5) si annulla per la Proposizione 6. Quindi in tale riferimento il momento risultante delle forze non dipende dalla scelta del polo.*

Scomposizione dell'energia cinetica

L'energia cinetica del sistema si può scomporre come somma di due componenti

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \qquad \text{(teorema di König).} \tag{3.6}$$

la prima corrisponde all'energia cinetica di un punto materiale di massa m che si muove come il baricentro del sistema, la seconda corrisponde all'energia cinetica del sistema nel riferimento del baricentro. Questo risultato è noto come teorema di König.

Dimostrazione.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_B \cdot (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_B) + \frac{1}{2} (\sum_{j=1}^{N} m_j) \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{v}_B.$$

Inoltre il secondo addendo a destra è nullo. □

3.2 Forze interne e forze esterne

Scomponiamo la forza $\vec{\mathbf{F}}_i$ che agisce sul punto P_i come somma vettoriale di 2 contributi: $\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} + \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})}$. Il vettore $\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})}$ si chiama **forza interna** ed è la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano su P_i; $\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})}$ è la somma delle altre forze e si chiama **forza esterna**.

Quindi $\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{v}}_i, t)$, cioè dipende solo dallo stato del punto P_i.

Ipotesi sulle forze interne (*forze di tipo classico*):

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})}(\vec{\mathbf{x}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_N) = \sum_{\substack{j\,=\,1 \\ j\,\neq\, i}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{ij}(\vec{\mathbf{x}}_i, \vec{\mathbf{x}}_j), \tag{3.7}$$

cioè le $\vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})}$ sono puramente posizionali e sono somma vettoriale di interazioni a due corpi. Inoltre assumiamo che valgano le seguenti proprietà:

1. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji} = 0, \quad \forall i, j,$
2. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} \times \vec{\mathbf{r}}_{ij} = 0$, con $\vec{\mathbf{r}}_{ij} = \vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_j$,
3. $\vec{\mathbf{F}}_{ij} = f_{ij}(\rho_{ij})\frac{\mathbf{r}_{ij}}{\rho_{ij}}$, con $\rho_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$.

Osserviamo che si ha $f_{ij} = f_{ji}$.

Osservazione 4. *Queste ipotesi sulle forze sono caratteristiche della Meccanica Classica: la proprietà 1. corrisponde al* **principio di azione e reazione***.*

Con queste ipotesi si dimostra che la risultante e il momento risultante delle forze interne (rispetto a qualunque polo Q) sono nulli. Infatti

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{R}}^{(I)} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \sum_{1\leq i<j\leq N} (\vec{\mathbf{F}}_{ij} + \vec{\mathbf{F}}_{ji}) = \vec{\mathbf{0}}, \\
\vec{\mathbf{N}}_Q^{(I)} &= \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq N} (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} + (P_j - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_{ji} = \sum_{1\leq i<j\leq N} (P_i - P_j) \times \vec{\mathbf{F}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}}.
\end{aligned}$$

3.3 Le equazioni cardinali

Bilancio del momento angolare

$$\dot{\mathbf{M}}_Q = \mathbf{N}_Q - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Basta derivare la formula che definisce $\mathbf{M}_Q$. □

Con le ipotesi sulle forze interne fatte nella sezione precedente, le relazioni (3.3), (3.8) si possono scrivere

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= \mathbf{N}_Q^{(E)} - \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} \end{cases} . \tag{3.9}$$

Le (3.9) si chiamano **equazioni cardinali** della dinamica.

3.4 Sistemi di forze equivalenti

Consideriamo due sistemi di forze applicate:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1) \dots (\vec{\mathbf{F}}_m, P_m)\}, \qquad \mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{G}}_1, Q_1) \dots (\vec{\mathbf{G}}_m, Q_m)\}.$$

Definizione 5. *$\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ si dicono equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo O qualunque.*

Notiamo che se i sistemi $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ hanno la stessa risultante ($\vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{F}} = \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{G}}$) e lo stesso momento risultante delle forze rispetto a un polo O fissato ($\vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{F}} = \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{G}}$), allora i due sistemi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualunque polo O':

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{\mathcal{F}} &= \sum_{h=1}^{m} (P_h - O') \times \vec{\mathbf{F}}_h = \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{F}} + (O - O') \times \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{F}} = \\ &= \vec{\mathbf{N}}_O^{\mathcal{G}} + (O - O') \times \vec{\mathbf{R}}^{\mathcal{G}} = \sum_{k=1}^{n} (Q_k - O') \times \vec{\mathbf{G}}_k = \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

Proposizione 7. *Ogni sistema di forze applicate $\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_1, P_1) \dots (\vec{\mathbf{F}}_m, P_m)\}$ è equivalente ad un sistema costituito da una forza applicata ad un punto qualunque Q, e da una coppia di forze, dipendente dalla scelta di Q.*

Dimostrazione. Sia $\vec{\mathbf{R}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$ la risultante delle forze ed $\vec{\mathbf{N}}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i$ il momento risultante rispetto ad un polo fissato $Q \in \mathbb{E}^3$. Considero il sistema di forze

$$\mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{R}}, Q), (\vec{\mathbf{F}}, Q_1), (-\vec{\mathbf{F}}, Q_2)\}$$

con $Q_1, Q_2 \in \mathbb{E}^3, \vec{\mathbf{F}} \in \mathbb{V}^3$ scelti in modo che il momento della coppia $(Q_1 - Q_2) \times \vec{\mathbf{F}}$ sia uguale a $\vec{\mathbf{N}}_Q$. Si verifica facilmente che $\mathcal{G}$ è equivalente a $\mathcal{F}$.

□

Osserviamo che nelle equazioni cardinali (3.9) appaiono solamente la risultante ed il momento risultante delle forze (esterne), quindi considerando un sistema equivalente di forze otteniamo le stesse equazioni differenziali.

Esempio: consideriamo il caso della forza di gravità

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathbf{F}}_i, P_i)\}_{i=1\dots N}, \qquad \vec{\mathbf{F}}_i = -m_i g \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Il sistema di forze $\mathcal{F}$ è equivalente a $\mathcal{G} = \{(\vec{\mathbf{R}}, B)\}$ formato da un'unica forza $\vec{\mathbf{R}} = -mg\hat{\mathbf{e}}_3$ applicata al baricentro B del sistema, infatti il momento risultante delle forze di gravità rispetto al baricentro è nullo.

3.5 Sistemi conservativi

Proposizione 8. *Le forze interne di tipo classico ammettono l'energia potenziale*

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{N} V_{ij}(\rho_{ij}), \quad \textit{con} \quad \frac{d}{d\rho_{ij}} V_{ij}(\rho_{ij}) = -f_{ij}(\rho_{ij}) \tag{3.10}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}_k} V^{(I)} &= \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}_k} \sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{N} V_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_k} V_{ik} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_k} V_{kj}\Big) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_k} V_{ki} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \frac{dV_{ki}}{d\rho_{ki}} \nabla_{\mathbf{x}_k}\rho_{ki} = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} f_{ki}\frac{\mathbf{r}_{ki}}{\rho_{ki}} = -\mathbf{F}_k^{(I)}.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 5. *Dalla relazione $f_{ij} = f_{ji}$ segue che possiamo scegliere $V_{ij} = V_{ji}$. Da questo fatto, che è stato usato nella dimostrazione della proposizione precedente, segue anche che l'energia potenziale delle forze interne si può scrivere*

$$V^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{1\leq i,j\leq N} V_{ij}(\rho_{ij}).$$

Osservazione 6. *La funzione*

$$V_k^{(I)}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} V_{kj}(\rho_{kj})$$

soddisfa la relazione

$$\mathbf{F}_k = -\nabla_{\mathbf{x}_k} V_k^{(I)},$$

ma la somma $\sum_{k=1}^{N} V_k^{(I)}$ non va bene come energia potenziale delle forze interne, perchè ci dà un contributo doppio delle forze.

Introduciamo la potenza delle forze interne e esterne, denotate rispettivamente con

$$\Pi^{(I)} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j^{(I)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_j, \qquad \Pi^{(E)} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_j^{(E)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_j.$$

Abbiamo la seguente

Proposizione 9. *(teorema dell'energia cinetica) Sia $t \to \mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t)))$ una soluzione delle equazioni di Newton (1.5). Allora*

$$\dot{T} = \Pi.$$

Se le forze interne sono di tipo classico, con energia potenziale $V^{(I)}$, allora

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)}) = \Pi^{(E)}. \tag{3.11}$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v}_j = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j\Big) = \dot{T}.$$

Siccome le forze interne ammettono l'energia potenziale $V^{(I)}$, abbiamo

$$\frac{d}{dt}V^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(I)} \cdot \mathbf{v}_i = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{I})} \cdot \mathbf{v}_i = -\Pi^{(I)},$$

da cui segue (3.11). □

Definizione 6. *La forza $\mathbf{F}_j$ che agisce sul punto P_j si dice conservativa se è puramente posizionale ($\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x})$) e se esiste una funzione scalare $V_j(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V_j$.*

Definizione 7. *Un sistema meccanico di N punti materiali si dice* **conservativo** *se le forze $\vec{\mathbf{F}}_j$ che agiscono sui punti P_j sono puramente posizionali e se esiste una funzione scalare $V(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V$, per $j = 1 \dots N$. La funzione V si chiama energia potenziale del sistema.*

Osservazione 7. *Nei sistemi conservativi le forze agenti sui singoli punti si possono ricavare dall'unica funzione scalare V. Si dice anche che il sistema ammette potenziale monogenico.*

Se le forze esterne $\vec{\mathbf{F}}_j^{(\mathrm{E})}$ sono tutte conservative (quindi $\vec{\mathbf{F}}_j^{(\mathrm{E})} = \vec{\mathbf{F}}_j^{(\mathrm{E})}(\mathbf{x}_j)$ ed esiste $V_j(\mathbf{x}_j)$ tale che $\vec{\mathbf{F}}_j^{(\mathrm{E})} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V_j$) allora la funzione $V^{(E)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} V_j(\mathbf{x}_j)$ soddisfa

$$\mathbf{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V^{(E)}, \qquad j = 1 \dots N.$$

In questo caso introduciamo l'energia potenziale del sistema

$$V(\mathbf{x}) = V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x})$$

e la sua **energia totale**

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + V^{(I)}(\mathbf{x}) + V^{(E)}(\mathbf{x}).$$

Proposizione 10. *(conservazione dell'energia) L'energia totale di un sistema di N punti materiali soggetto a forze interne di tipo classico e a forze esterne conservative si conserva.*

Dimostrazione. Usando la (3.11) si ha

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)} + V^{(E)}) = \Pi^{(E)} + \frac{d}{dt}V^{(E)} = 0,$$

infatti

$$\frac{d}{dt}V^{(E)} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\mathbf{x}_i} V^{(E)} \cdot \mathbf{v}_i = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i^{(\mathrm{E})} \cdot \mathbf{v}_i = -\Pi^{(E)}.$$

□

3.6 Similitudine meccanica

Se le forze sono conservative, in alcuni casi è possibile ottenere informazioni sulle soluzioni senza bisogno di risolvere le equazioni del moto.

Esempio 2. *(riscalamento di massa e tempo)*

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t))$$

poniamo $t_1 = \tau t$, $m_1 = \mu m$, con $\mu = \tau^2$. Allora $\mathbf{x}_1(t_1) = \mathbf{x}(t_1/\tau)$ soddisfa

$$m_1\frac{d^2}{dt_1^2}\mathbf{x}_1(t_1) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_1(t_1))$$

infatti

$$\frac{d}{dt_1}\mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t_1/\tau), \qquad \frac{d^2}{dt_1^2}\mathbf{x}_1(t_1) = \frac{1}{\tau^2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t_1/\tau).$$

Esempio 3. *(riscalamento della lunghezza con potenziali omogenei)*

Consideriamo un campo di forze conservativo con energia potenziale V. Assumiamo inoltre che V sia omogenea di grado α:

$$V(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^\alpha V(\mathbf{x}), \qquad \forall\lambda > 0.$$

Ne segue che il gradiente $\nabla_{\mathbf{x}} V$ è omogeneo di grado $\alpha - 1$ (vedi Appendice, Sezione 15.2).

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t)) \tag{3.12}$$

Considero

$$\mathbf{x}_1(t) = \lambda\mathbf{x}(t)$$

e osservo che

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}_1(t) &= m\lambda\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = -\lambda\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t)) = \\ &= -\lambda^{2-\alpha}\nabla_{\mathbf{x}} V(\lambda\mathbf{x}(t)) = -\lambda^{2-\alpha}\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_1(t)). \end{aligned}$$

Se definisco $t_1 = \tau t$, $\mathbf{x}_2(t_1) = \mathbf{x}_1(t_1/\tau) = \lambda\mathbf{x}(t_1/\tau)$ dall'Esempio 2 si ottiene

$$m\frac{d^2}{dt_1^2}\mathbf{x}_2(t_1) = -\frac{\lambda^{2-\alpha}}{\tau^2}\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_2(t_1)).$$

Quindi la condizione per cui le orbite riscalate risolvano la stessa ODE è

$$\frac{\lambda^{2-\alpha}}{\tau^2} = 1. \tag{3.13}$$

Osservazione 8. *Se $\alpha = 2$ (caso dell'oscillatore armonico) dalla (3.13) si ha $\tau^2 = 1$ per ogni $\lambda > 0$. Se abbiamo un'orbita periodica $\mathbf{x}_{per}(t)$ di periodo T allora esiste tutta una famiglia a 1 parametro di orbite $\{\lambda\mathbf{x}_{per}(t)\}$, $\lambda > 0$ che hanno lo stesso periodo. Nel caso unidimensionale ($\mathbf{x}_{per} \in \mathbb{R}$) da tale famiglia si ottengono tutte le orbite nello spazio delle fasi, che risulta foliato in orbite periodiche isocrone.*

Osservazione 9. *Se $\alpha = -1$ (caso del problema di Keplero, vedi Sezione 4.6), dalla (3.13) si ha $\tau^2 = \lambda^3$. Se $\mathbf{x}_{per}(t)$ è una soluzione periodica, cioè un'orbita ellittica, di periodo T allora la famiglia a un parametro $\{\lambda\mathbf{x}_{per}(t/\tau)\}$, con $\tau^2 = \lambda^3$, risolve la stessa equazione. Il rapporto tra i periodi di due soluzioni $\lambda_1\mathbf{x}_{per}(t/\tau_1)$, $\lambda_2\mathbf{x}_{per}(t/\tau_2)$ di questa famiglia è*

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{3/2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}, \tag{3.14}$$

dove a_1, a_2 sono i semiassi maggiori delle 2 orbite. La relazione (3.14) corrisponde alla terza legge di Keplero.

Esempio 4. *(trasformazioni di scala generali con potenziali omogenei)*

Più in generale posso considerare trasformazioni di scala

$$t \to t_1 = \tau t, \qquad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}, \qquad m \to m_1 = \mu m.$$

Se $\mathbf{x}(t)$ soddisfa (3.12) con V omogenea di grado α, allora $\mathbf{x}_1(t_1) = \lambda\mathbf{x}(t_1/\tau)$ soddisfa

$$m_1\frac{d^2}{dt_1^2}\mathbf{x}_1(t_1) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}_1(t_1))$$

solo se $\lambda^{2-\alpha}/\tau^2 = \mu$.

3.7 Alcuni risultati sul problema degli N corpi

Consideriamo N punti materiali $P_1 \dots P_N$ di masse $m_1 \dots m_N$ soggetti soltanto alla loro interazione mutua, dovuta a forze interne di tipo classico. Sia $V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N)$ l'energia potenziale di tali forze, per cui il moto dei punti soddisfa le equazioni

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} V(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N).$$

Introduciamo il momento di inerzia del sistema rispetto al baricentro $\mathbf{x}_B$:

$$I(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2.$$

Dimostriamo che il momento di inerzia si può scrivere in termini delle distanze mutue tra i punti:

Proposizione 11. *Vale la seguente formula*

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 = \frac{1}{m} \sum_{1 \le i < j \le N} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2. \tag{3.15}$$

Dimostrazione.

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{N} m_i m_j (|\mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{x}_j|^2 - 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (m - m_i) |\mathbf{x}_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j (m - m_j) |\mathbf{x}_j|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{N} m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) =$$

$$= m \sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i^2 |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{N} m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) =$$

$$= m \sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j).$$

Inoltre

$$\sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_B|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \Big(\mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{x}_j \Big) \cdot \Big(\mathbf{x}_i - \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{N} m_h \mathbf{x}_h \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{x}_i|^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{m_i m_j}{m} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{m^2} \sum_{j,h=1}^{N} m_j m_h \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{x}_i|^2 - \frac{2}{m} \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) + \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j).$$

□

Osservazione 10. *Il risultato precedente è utile per interpretare alcune questioni sul moto degli N corpi in termini del moto delle distanze mutue (vedi Lagrange 1772, Albouy 1991).*

A meno di applicare una trasformazione galileiana, possiamo assumere che il baricentro degli N punti sia fermo nell'origine: $\mathbf{x}_B = \mathbf{0}$. Dimostriamo la seguente

Proposizione 12.

$$\ddot{I} = 4T + 2\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i$$

Dimostrazione. Basta derivare due volte $I(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_N)$ rispetto a t ed usare le equazioni di Newton:

$$\dot{I} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{x}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i, \quad \ddot{I} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i.$$

□

Corollario 1. *(identità di Lagrange) Se le forze sono conservative e l'energia potenziale V è omogenea di grado α allora*

$$\ddot{I} = 4T - 2\sum \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{x}_i = 4T - 2\alpha V = 4E - 2(\alpha + 2)V,$$

cioè $\ddot{I}$ dipende solo dalla posizione dei punti e dall'energia totale E.

Capitolo 4

Moti centrali

Si fissi un sistema di riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$.

Definizione 8. *Si dice che* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ *è un* **campo di forze centrale** *con centro* O*, se vale la relazione*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\,\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \;\; \textit{con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \rho = |\mathbf{x}| \; . \tag{4.1}$$

Si verifica facilmente che, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, valgono le seguenti relazioni:

i) $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
ii) $\mathbf{F}(R\,\mathbf{x}) = R\,\mathbf{F}(\mathbf{x})\,,$ per ogni matrice $R \in SO(3)$.

Osserviamo che in questo caso le equazioni di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ sono invarianti solo rispetto ad alcune trasformazioni di Galileo, quelle del tipo g_3, ma non lo sono rispetto alle traslazioni dell'origine, che corrisponde al centro delle forze. Quindi nel caso di forze centrali non vale il principio di relatività di Galileo.

Esercizio 3. *Dimostrare che, se vale*

$$\mathbf{F}(R\,\mathbf{x}) = R\,\mathbf{F}(\mathbf{x})\,, \;\textit{per ogni matrice } R \in SO(3) \tag{4.2}$$

allora il campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ *è centrale.*

Dimostrazione. Mostriamo prima che dalla (4.2) segue $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dati due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ esistono due diverse matrici di rotazione R_1, R_2 tali che $R_1\,\mathbf{x} = R_2\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$. La rotazione $R_2^{-1}R_1$ lascia invariato $\mathbf{x}$ ma non è l'identità, e quindi non lascia invariati i vettori che non sono paralleli a $\mathbf{x}$. Perciò, se $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ non fosse parallelo a $\mathbf{x}$, si avrebbe $R_1\mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq R_2\mathbf{F}(\mathbf{x})$, e non potrebbero essere entrambi uguali a $\mathbf{F}(\mathbf{y})$.

Adesso dimostriamo che $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\,\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ per una qualche funzione $f(\rho)$. Se esistessero due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, con $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$, tali che $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \neq \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}$, allora nessuna rotazione che manda $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ potrebbe mandare $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{F}(\mathbf{y})$. Qui abbiamo usato la relazione i). $\square$

Abbiamo inoltre:

Proposizione 13. *Se il campo di forze* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ *è centrale, allora è conservativo.*

Dimostrazione. Basta prendere come energia potenziale la funzione

$$V(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\rho(\mathbf{x}))\,, \quad \text{con} \;\; \mathcal{V}(\rho) = -\int f(\rho)\,d\rho\ .$$

□

4.1 Riduzione del numero dei gradi di libertà

Dalla relazione $\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O = \mathbf{0}$ abbiamo la conservazione del momento angolare $\mathbf{M}_O$ rispetto al centro di forze O.

Inoltre si conserva l'energia totale $E = T + V$, dove V è l'energia potenziale della forza centrale.

Dimostriamo innanzitutto il seguente:

Proposizione 14. $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ *se e solo se il moto si svolge su una retta passante per* O.

Dimostrazione. $\mathbf{M}_O = \mathbf{x}\times\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, quindi posso trovare un vettore unitario $\mathbf{e}\in\mathbb{R}^3$ con $\mathbf{x}(0) = \rho_0\mathbf{e}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot\rho_0\mathbf{e}$. Se $t\to\rho(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy $m\ddot\rho = f(\rho), \rho(0) = \rho_0, \dot\rho(0) = \dot\rho_0$ allora $\mathbf{x}(t) = \rho(t)\mathbf{e}$ è la soluzione di $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, con dati iniziali $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$. Viceversa, se il moto avviene lungo una retta passante per O allora $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$ sono sempre paralleli, quindi $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$.

□

Assumiamo adesso che $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$. Si usa l'integrale del momento angolare $\mathbf{M}_O$ per ridurci ad un problema unidimensionale. L'invarianza della direzione di $\mathbf{M}_O$ ci dice che il moto si svolge su un piano fisso π_O (che dipende dalle condizioni iniziali). Possiamo ruotare il sistema di riferimento $O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$ introdotto in modo che $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{M}_O$.

Introduco coordinate polari ρ, θ, definite da

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{x}/\rho = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_\rho = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2\,,$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot\theta\mathbf{e}_\theta, \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot\theta\mathbf{e}_\rho\ .$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{x} = \rho\mathbf{e}_\rho\,, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \dot\rho\mathbf{e}_\rho + \dot\theta\rho\mathbf{e}_\theta\,, \qquad \ddot{\mathbf{x}} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta)\mathbf{e}_\theta\ .$$

Proietto l'equazione del moto lungo $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$:

$$m\ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{e}_\rho = f(\rho)\,, \qquad m\ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{e}_\theta = 0\ . \tag{4.3}$$

La seconda equazione in (4.3) rappresenta la conservazione della terza componente del momento angolare $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = \rho\mathbf{e}_\rho \times m(\dot\rho\mathbf{e}_\rho + \rho\dot\theta\mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2\dot\theta$, infatti

$$m\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\theta) \ .$$

Fissiamo un valore di tale integrale:

$$m\rho^2\dot\theta = \ell \ . \tag{4.4}$$

Sostituendo $\dot\theta = \ell/(m\rho^2)$ nella prima equazione in (4.3) ci riduciamo al sistema unidimensionale:

$$m\ddot\rho = -\frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho)\,, \qquad V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho) = V(\rho) + \frac{\ell^2}{2m\rho^2}. \tag{4.5}$$

La funzione $V_{\text{eff}}^{(\ell)}$ si dice energia potenziale efficace. Il sistema (4.5) ha l'integrale primo

$$E_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho,\dot\rho) = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho)\,,$$

che corrisponde all'energia totale $E = T + V$ scritta come funzione di $\rho, \theta, \dot\rho, \dot\theta$ con la condizione (4.4):

$$E(\rho,\dot\rho) = \left[\frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2) + V(\rho)\right]\Bigg|_{\dot\theta=\ell/(m\rho^2)} = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{\ell^2}{2m\rho^2} + V(\rho) \ .$$

4.2 Legge delle aree

Dalla conservazione del momento angolare si ha che θ è monotona, quindi può essere utilizzata come variabile indipendente per descrivere la traiettoria: infatti se $\ell \neq 0$, $\dot\theta = \ell/\rho^2$ mantiene lo stesso segno.

Sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\theta_0, \theta)$ l'insieme descritto dal raggio vettore quando l'angolo polare passa dal valore θ_0 a θ. L'area di questo insieme è

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\theta_0}^{\theta}\int_0^{\rho(\theta')} \rho'\,d\rho'\,d\theta' = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta}\rho^2(\theta')\,d\theta'\,,$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\mu(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\rho^2\dot\theta\,,$$

quindi la conservazione della terza componente del momento angolare $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3$ corrisponde alla conservazione della velocità areolare (legge delle aree).

4.3 Formula di Binet

Consideriamo un punto materiale che si muove in un piano in cui mettiamo coordinate polari (ρ, θ). Assumiamo che valga la legge delle aree: $\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = c$, con $c \neq 0$. Queste ipotesi valgono in particolare nel caso dei moti centrali.

Allora la componente radiale dell'accelerazione è

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4c^2}{\rho^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\right) . \tag{4.6}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{2c}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} = -2c\frac{d}{d\theta}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) , \\ \ddot{\rho} &= \dot{\theta}\frac{d\dot{\rho}}{d\theta} = -\frac{4c^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) , \end{aligned}$$

per cui, usando la $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ si ottiene (4.6).

4.4 Traiettoria del moto

Fissate le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$, per determinare il comportamento qualitativo della traiettoria nel piano del moto, con coordinate polari (ρ, θ), si utilizzano le leggi di conservazione

$$m\rho^2\dot{\theta} = \ell , \qquad \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho) = E , \tag{4.7}$$

in cui ℓ, E sono i valori delle quantità conservate al tempo iniziale $t = 0$. Se $\ell \neq 0$ allora possiamo descrivere la traiettoria attraverso un mappa $\theta \mapsto \rho(\theta)$. Dalle (4.7) si ottiene

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\frac{m\rho^2}{\ell}\sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{\text{eff}}(\rho)]} .$$

Siano ρ_{min}, ρ_{max} due soluzioni consecutive di $V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho) = E$, con $0 < \rho_{min} < \rho_{max} < +\infty$, e tali che

$$\frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho_{min}), \frac{d}{d\rho}V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho_{max}) \neq 0.$$

Assumiamo inoltre che esista $\bar{\rho} \in (\rho_{min}, \rho_{max})$ con $V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\bar{\rho}) < E$, cioè che esistano dei moti con energia E e valori di ρ nell'intervallo $[\rho_{min}, \rho_{max}]$. Allora possiamo definire l'**angolo di avanzamento** del pericentro

$$\Delta\theta = \ell\sqrt{\frac{2}{m}}\int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\rho^2\sqrt{E - V_{\text{eff}}(\rho)}}d\rho . \tag{4.8}$$

In questo caso, nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ ho un'orbita periodica di periodo

$$T_\rho = \sqrt{2m} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{1}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho \, .$$

La condizione per avere una traiettoria periodica nel piano del moto è che

$$\frac{\Delta\theta}{\pi} \in \mathbb{Q} \, .$$

Dimostriamo adesso la seguente

Proposizione 15. *In generale la corona circolare* $\mathcal{C} = \{(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \rho_{\text{min}} \leq \rho \leq \rho_{max}\}$ *viene riempita in modo ovunque densa.*

Dimostrazione. Tutti i valori di ρ nell'intervallo $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ vengono raggiunti periodicamente. Fissiamo una circonferenza C_ρ centrata in O e di raggio $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$. Dimostriamo, seguendo [4], che in generale $\mathcal{C}_\rho$ viene riempito in modo ovunque denso.

Definiamo la mappa

$$\phi : C_\rho \to C_\rho \, , \qquad \phi(\rho e^{i\theta}) \mapsto \rho e^{i(\theta+\Delta\theta)}$$

dove $\Delta\theta$ è l'angolo di avanzamento del pericentro.

Se $\Delta\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$ allora i punti $\{\phi^m(x)\}_m$, con $x = \rho e^{i\theta}$, sono tutti distinti. Siccome C_ρ è compatto c'è almeno un punto di accumulazione, quindi per ogni $\epsilon > 0$ esistono interi positivi n, m, con $n > m$, tali che

$$d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon \, .$$

Inoltre la mappa ϕ conserva la distanza tra due punti, quindi

$$d(\phi^{n-m}(x), x) = d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon \, .$$

posto $k = n - m$ otteniamo una successione

$$x, \phi^k(x), \phi^{2k}(x), \phi^{3k}(x), \ldots$$

di punti distinti su C_ρ che sono equidistanti e due consecutivi di essi distano meno di ϵ. Si conclude usando l'arbitrarietà di ϵ.

□

4.5 Riduzione del problema dei 2 corpi

Studiamo il moto di due punti materiali di massa m_1, m_2 soggetti alla loro interazione mutua dovuta a forze interne di tipo classico. Le equazioni del moto sono

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1, \qquad m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2$$

dove

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\\
&\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}\\
&\mathbf{F}_j \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}\\
&\mathbf{F}_j = f_j(\rho)\frac{\mathbf{r}}{\rho}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,\ \rho = |\mathbf{r}|
\end{aligned}$$

per $j = 1, 2$.

Il cambiamento di coordinate

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (\mathbf{x}_B, \mathbf{r})$$

definito dalle relazioni

$$\mathbf{x}_B = \frac{1}{m}(m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

disaccoppia le equazioni di Newton:

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{0}, \qquad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \tag{4.9}$$

in cui $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, $m = m_1 + m_2$. Possiamo quindi studiare il problema di moto centrale, dato dalla seconda delle (4.9) e poi ricostruire la soluzione tramite le relazioni

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_B = \frac{m_2}{m}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_B = -\frac{m_1}{m}\mathbf{r}. \tag{4.10}$$

Osservazione 11. *Dalle (4.10) si vede che le traiettorie nel riferimento del centro di massa si ottengono per similitudine da quelle del moto relativo, soluzione di un problema di moto centrale.*

Osservazione 12. *Nel caso della forza di attrazione gravitazionale di Newton si ha* $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$*, con G la costante di gravitazione universale, per cui, utilizzando la relazione $m\mu = m_1 m_2$, si ottiene* $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm\mu}{\rho^3}\mathbf{r}$*, con $\rho = |\mathbf{r}|$. In questo modo il problema del moto centrale (cioè la seconda delle (4.9)) si scrive*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -Gm\frac{\mathbf{r}}{\rho^3}.$$

4.6 Il problema di Keplero

Tycho Brahe (1546 - 1601): misura delle posizioni dei pianeti a meno di 1 minuto di arco (=1/60 grado) prima dell'invenzione del telescopio.

Johannes Kepler (1571 - 1630): collabora con Tycho a Praga nel 1601

Leggi di Keplero

1) i pianeti descrivono delle ellissi di cui il Sole occupa uno dei 2 fuochi;
2) il raggio vettore che congiunge un pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali;
3) i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi, cioè $\frac{T^2}{a^3}$ è una costante, che è la stessa per tutti i pianeti.

In *Astronomia Nova* (1609) appaiono le prime due leggi. La terza si trova in *Harmonices Mundi* (1619).

Problema di Keplero

i) *problema diretto*: dato il campo di forze calcolare i moti possibili;
ii) *problema inverso*: dati i moti possibili calcolare il campo di forze.

Entrambi i problemi sono stati risolti da Newton (*Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (1687)).

4.6.1 Problema diretto

Posto

$$k = GmM, \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad M = m_1 + m_2,$$

considero il moto centrale dato dalle equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}$$

con $\rho = |\mathbf{x}|$, $k > 0$ e con condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$. La forza centrale ammette l'energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\rho}.$$

Sia $\ell = m\rho^2\dot{\theta}$ il valore del momento angolare che corrisponde alle condizioni iniziali. Essendo il moto centrale, si ha la legge delle aree, che rappresenta la conservazione del momento angolare $m\rho^2\dot{\theta}$ e ci dà la seconda legge di Keplero.

Proiettando l'equazione di Newton in direzione radiale $\mathbf{e}_\rho$ ed usando la formula di Binet si ottiene l'equazione per la componente radiale della forza:

$$-\frac{4mc^2}{\rho^2}\Big[\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) + \frac{1}{\rho}\Big] = -\frac{k}{\rho^2}$$

dove $c = \frac{\ell}{2m}$ è la costante delle aree. Ponendo $p = \frac{4mc^2}{k}$ e usando la variabile $u = 1/\rho$ si ottiene l'equazione lineare

$$u'' + u = \frac{1}{p} \tag{4.11}$$

dove $'$ indica la derivata rispetto a θ. L'equazione (4.11) ha come soluzione generale

$$u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

con $A > 0$, $\theta_0 \in S^1$. Introducendo il parametro $e = Ap$ si ha l'equazione di una conica in coordinate polari

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}. \tag{4.12}$$

p, e IN FUNZIONE DI ℓ, E

Dalla relazione $c = \frac{\ell}{2m}$ si ottiene subito

$$p = \frac{\ell^2}{mk}. \tag{4.13}$$

Il valore minimo di ρ lungo la traiettoria definita da (4.12) è dato da

$$\rho_{min} = \frac{p}{1+e} \tag{4.14}$$

che è un punto di inversione del moto per la variabile ρ, cioè

$$E - V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho_{min}) = 0, \tag{4.15}$$

dove

$$V_{\text{eff}}^{(\ell)}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{\ell^2}{2m\rho^2}$$

è l'energia potenziale efficace del problema di Keplero. Sostituendo le relazioni (4.13), (4.14) nella (4.15) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= E + \frac{k}{\rho_{min}} - \frac{\ell^2}{2m\rho_{min}} = E + \frac{k^2 m(1+e)}{\ell^2} - \frac{\ell^2 m^2 k^2 (1+e)^2}{2m\ell^4} = \\ &= E + \frac{mk^2(1+e)}{\ell^2}\Big(1 - \frac{1+e}{2}\Big) = E + \frac{mk^2(1-e^2)}{2\ell^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$e^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}. \tag{4.16}$$

Dalla (4.16) si ottiene che

$$\begin{array}{llll} E < 0 & \Leftrightarrow & e < 1 & \text{orbite ellittiche} \\ E = 0 & \Leftrightarrow & e = 1 & \text{orbite paraboliche} \\ E > 0 & \Leftrightarrow & e > 1 & \text{orbite iperboliche} \end{array}$$

Inoltre dalla relazione $mk^2 + 2E\ell^2 \geq 0$ segue che non tutte le coppie (ℓ, E) sono ammissibili (vedi Figura 4.6.1).

Periodo delle orbite ellittiche

Sia T il periodo di un'orbita ellittica che corrisponde ai valori $\ell, E(<0)$ del momento angolare e dell'energia.

Valgono le relazioni seguenti, che legano semiasse maggiore a, semiasse minore b ai parametri p, e e quindi ai valori di ℓ, E:

$$p = a(1-e^2), \qquad b = a\sqrt{1-e^2},$$

per cui

$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

L'area dell'ellisse è

$$\pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2}\frac{\ell}{\sqrt{mk}}$$

e la velocità areale è

$$c = \frac{\ell}{2m},$$

per cui

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^3\ell^2}{mk}\frac{4m^2}{\ell^2} = \frac{4\pi^2 m}{k}a^3$$

che rappresenta la terza legge di Keplero.

La costante di proporzionalità è quindi $\frac{4\pi^2 m}{k} = \frac{4\pi^2}{GM}$, con $M = m_1 + m_2$. Si può assumere che M, che è la massa del Sole più quella di un pianeta, non dipenda dal pianeta. L'errore relativo che si commette è dell'ordine di 10^{-3} (rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole).

4.6.2 Il vettore di Laplace-Lenz

$$\mathbf{L} = \mathbf{p}\times\mathbf{M}_O - mk\frac{\mathbf{x}}{\rho} \tag{4.17}$$

Mostriamo che $\mathbf{L}$ è un integrale primo per il moto centrale con energia potenziale di Keplero $V(\rho) = -\frac{k}{\rho}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{M}_O + \mathbf{p}\times\mathbf{N}_O - mk\Big[\frac{\mathbf{v}}{\rho} - \frac{\mathbf{x}}{\rho^2}\frac{d}{dt}(\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}})\Big] = \\
&= \Big(-\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3}\Big)\times(\mathbf{x}\times m\mathbf{v}) + m\mathbf{v}\times\Big[\mathbf{x}\times\Big(-\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3}\Big)\Big] - \frac{mk}{\rho}\mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^2}\mathbf{x}\Big(\frac{2\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{2\rho}\Big) = \\
&= -\frac{km}{\rho^3}[(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{x} - \rho^2\mathbf{v}] - \frac{mk}{\rho}\mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^3}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{x} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la norma di L.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} &= \Big(\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O - mk\frac{\mathbf{x}}{\rho}\Big)\cdot\Big(\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O - mk\frac{\mathbf{x}}{\rho}\Big) = \\
&= |\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O|^2 - 2\frac{mk}{\rho}\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{x} + m^2k^2 = \\
&= |\mathbf{p}|^2[|\mathbf{p}|^2\rho^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2] - 2\frac{mk}{\rho}[|\mathbf{p}|^2\rho^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2] + m^2k^2,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O = \mathbf{p}\times(\mathbf{x}\times\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2\mathbf{x} - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})\mathbf{p},$$

da cui

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O|^2 &= |\mathbf{p}|^2[\mathbf{p}|^2\rho^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2], \\
\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{p}|^2\rho^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})^2.
\end{aligned}$$

Usando la relazione

$$\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}\cdot\mathbf{M}_O = |\mathbf{M}_O|^2 = \ell^2$$

e l'energia cinetica T si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} &= \ell^2\Big(|\mathbf{p}|^2 - 2\frac{mk}{\rho}\Big) + m^2k^2 = \ell^2\Big(2mT - 2\frac{mk}{\rho}\Big) + m^2k^2 = \\
&= 2mE\ell^2 + m^2k^2 = m^2k^2\Big(1 + 2\frac{E\ell^2}{mk^2}\Big) = m^2k^2e^2.
\end{aligned}$$

Concludo la norma del vettore di Lenz è il prodotto di mk e dell'eccentricità e.

Denotiamo con ψ l'angolo tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{L}$. Si ha allora

$$e\cos\psi = \frac{\mathbf{L}}{mk}\cdot\frac{\mathbf{x}}{\rho} \;=\; \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{x}}{mk\rho} - 1 = \frac{\ell^2}{mk\rho} - 1.$$

Usando la (4.13) si ottiene

$$1 + e\cos\psi = \frac{p}{\rho}$$

e si ritrova l'equazione della traiettoria in forma polare (4.12) con l'angolo ψ al posto di $\theta - \theta_0$. Ne segue che $\mathbf{L}$ deve indicare la direzione del pericentro, che corrisponde a $\theta = \theta_0$.

4.6.3 Problema inverso

Se valgono le leggi di Keplero, l'accelerazione di ogni pianeta è sempre diretta verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso. Inoltre la costante di proporzionalità è la stessa per tutti i pianeti.

Il fatto che il moto sia piano e la velocità aerale costante implica che l'accelerazione sia puramente radiale.

Sostituiamo l'equazione della traiettoria

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

nella formula di Binet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4c^2}{\rho^2}\Big[\frac{d^2}{d\theta^2}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) + \frac{1}{\rho}\Big] = -\frac{4c^2}{\rho^2}\Big(-\frac{e\cos\theta}{p} + \frac{1 + e\cos\theta}{p}\Big) = -\frac{4c^2}{p}\frac{1}{\rho^2}.$$

Quindi l'accelerazione radiale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole e la costante di proporzionalità è $-4c^2/p$.

Scegliamo un'orbita ellittica. Siano T, a, b periodo e semiassi maggiore e minore di quest'orbita. Dalla formula $c = \frac{\pi ab}{T}$ si ottiene

$$\frac{4c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}\frac{a}{b^2} = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}$$

che per la terza legge di Keplero è la stessa costante per ogni pianeta.

Vedremo nella Sezione 4.7 che solo due tipi di forze centrali, quelle dell'oscillatore armonico e del problema di Keplero, sono tali che tutte le orbite limitate con momento angolare non nullo sono periodiche.

4.7 Teorema di Bertrand

In [7] J. Bertrand espone il seguente suggestivo risultato:

'Parmi les lois d'attraction qui supposent l'action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrive nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes le lois d'attraction *permettent* des orbites fermées, mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*.' [1]

Diamo un enunciato più formale:

Teorema 1. *(Bertrand) Se ho un campo di forze centrale attrattivo* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$, $\rho = |\mathbf{x}|$, *con* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *analitica ed* $f(\rho) < 0$, *tale che tutte le orbite non rettilinee e limitate siano chiuse, allora*

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^2} \qquad \textit{oppure} \qquad f(\rho) = -A\rho$$

[1] 'Tra le leggi di attrazione che assumono azione nulla a distanza infinita, quella della natura è la sola per la quale un corpo, lanciato *arbitrariamente*, con una velocità inferiore a un certo limite, e attirato verso un centro fisso, descrive necessariamente attorno a questo centro una curva chiusa. Tutte le leggi di attrazione *permettono* orbite chiuse, ma la legge della natura è la sola che le *impone*'.

per una costante $A > 0$.

Dimostrazione. Essendo la forza attrattiva, una traiettoria rettilinea deve per forza passare per l'origine, quindi se considero traiettorie non rettilinee queste hanno necessariamente momento angolare non nullo, per la Proposizione 14.

Dalla formula di Binet si ha

$$f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right] \qquad \text{con} \quad k^2 = 4mc^2.$$

Quindi $\ell = k/\sqrt{m}$. Ponendo $z = 1/\rho$ e $\psi(z) = -\rho^2 f(\rho)|_{\rho=1/z}$ si ottiene

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2}\psi(z) = 0 \ . \tag{4.18}$$

Moltiplicando per $\frac{dz}{d\theta}$ ed integrando rispetto a θ

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2}w(z) - h = 0$$

per una costante h, con $w(z) = 2\int \psi(z)dz$.

Ricaviamo la relazione che lega h, k^2 all'energia E. Dalle relazioni

$$w(z) = -2\int \frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big)dz = 2\int f\Big(\frac{1}{z}\Big)d\Big(\frac{1}{z}\Big) = -2V\Big(\frac{1}{z}\Big) ,$$

con $-\nabla_{\mathbf{x}}V(\rho) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ e

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^2 = \left[-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right]^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2, \quad \text{con} \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\dot\rho}{\dot\theta} = \dot\rho\rho^2\frac{\sqrt{m}}{k} ,$$

si ottiene

$$h = \frac{2}{k^2}\left(\frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{k^2}{2\rho^2} + V(\rho)\right) = \frac{2E}{k^2} \ .$$

Osserviamo che l'ipotesi che la forza sia attrattiva implica l'esistenza di orbite circolari di raggio z_c per ogni scelta di $z_c > 0$: infatti queste corrispondono ad equilibri del sistema newtoniano $\frac{d^2z}{d\theta^2} = \phi_k(z)$ con $\phi_k(z) = \frac{1}{k^2}\psi(z) - z$ e per ogni $z_c > 0$ possiamo trovare k tale che $\phi_k(z_c) = 0$. In particolare si ottiene che l'insieme delle orbite limitate non è vuoto.[2]

Mostriamo adesso, seguendo [1], che se tutte le orbite non rettilinee e limitate sono chiuse possiamo trovare un intervallo aperto non vuoto di valori di z corrispondenti

[2] In realtà per quanto segue basterebbe l'ipotesi che $f(\rho)$ assuma dei valori negativi. Se $f(\rho) > 0$ per ogni ρ allora non ci sono orbite limitate, quindi qualunque funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ analitica e positiva soddisfa le ipotesi del teorema.

ad orbite circolari stabili.[3] Data un'orbita circolare con $z = z_c$, se $\phi_k'(z_c) < 0$ questa è un minimo non degenere dell'energia potenziale $\mathcal{V}(z) = -\int \phi_k(z)dz$ e l'orbita circolare è stabile. Nell'ipotesi che tutte le orbite non rettilinee e limitate siano chiuse non è possibile che $\phi_k'(z_c) > 0$ oppure che $\phi_k'(z)$ sia identicamente nulla in un intorno di z_c. Infatti nel primo caso, analizzando il comportamento della separatrice instabile del sistema $\frac{dz}{d\theta} = v, \frac{dv}{d\theta} = \phi_k(z)$, si dimostra che c'è un'orbita limitata asintotica all'equilibrio z_c, che quindi non può essere chiusa. Nel secondo caso, per l'analiticità si ha $\phi_k'(z) \equiv 0$ e dunque

$$\psi'(z) = k^2, \qquad \psi(z) = k^2 z + A \ (A > 0), \qquad f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^3} - \frac{A}{\rho^2} \ .$$

In questo caso esistono orbite non rettilinee limitate che non sono chiuse, infatti la forza efficace risulta semplicemente $f_e(\rho) = -\frac{A}{\rho^2}$ e l'energia potenziale efficace è $V_e(\rho) = -\frac{A}{\rho}$. Quindi se $E < 0$ le orbite sono limitate e doppiamente asintotiche all'origine.

Infine, se z_c è uno zero isolato di $\phi_k'(z)$ si può prendere un valore di $\tilde{z}_c$ vicino a z_c corrispondente ad un'orbita circolare con $\phi_k'(\tilde{z}_c) < 0$.

Osserviamo che le equazioni

$$\phi_k(z) = 0\,, \qquad \phi_k'(z) = 0\,,$$

non possono essere soddisfatte per valori (z, k) che formano un continuo. Infatti, dalla definizione di ϕ_k, in tal caso si avrebbe

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{z}$$

che integrata ci dà $\psi(z) = Az$, con $A > 0$. Ma allora $\phi_k'(z) = \frac{A}{k^2} - 1$, per cui se è nullo per una coppia (k, z_c) allora è identicamente nullo.

Quindi, in virtú delle ipotesi fatte, possiamo trovare un intervallo aperto non vuoto di valori di z corrispondenti ad orbite limitate, che in alcuni casi sono orbite circolari stabili. Queste orbite corrispondono a certi valori di k^2, h e quindi di c, E: per ciascuna di queste chiamiamo $\alpha = z_{min}, \beta = z_{max}$ i valori minimo e massimo di z, che corrispondono a tali valori degli integrali primi c, E.

Abbiamo quindi che, $\forall \alpha, \beta$ in un intervallo aperto non vuoto $\mathcal{J}$, con $0 < \alpha < \beta$, l'angolo di avanzamento dal pericentro all'apocentro è dato da

$$\Delta\theta = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}w(z) - z^2}} \ .$$

Poichè le orbite considerate sono chiuse, si deve avere $\Delta\theta = q\pi$, con $q \in \mathbb{Q}$.

[3]Diciamo che l'orbita circolare di raggio z_c è stabile se z_c è un punto di equilibrio stabile di $\frac{d^2z}{d\theta^2} = \phi_k(z)$

Calcoliamo la relazione che lega h, k^2 ad α, β. Osservo che questi ultimi sono valori di inversione, quindi

$$h + \frac{1}{k^2} w(\alpha) - \alpha^2 = 0\,, \qquad h + \frac{1}{k^2} w(\beta) - \beta^2 = 0\,,$$

da cui

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{w(\beta) - w(\alpha)}\,, \qquad h = \frac{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha)}{w(\beta) - w(\alpha)}\,.$$

Otteniamo che deve valere la relazione

$$q\pi = I(\alpha, \beta) \tag{4.19}$$

con

$$I(\alpha, \beta) := \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{w(\beta) - w(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) w(z) - z^2 (w(\beta) - w(\alpha))}} dz \tag{4.20}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$, con $0 < \alpha < \beta$, quindi q deve essere costante poichè $\mathbb{Q}$ è un insieme totalmente sconnesso.

Selezioniamo in due passi i potenziali ammissibili, che soddisfano (4.19). Il primo passo consiste nel considerare traiettorie con α, β molto vicini e passare al limite per $\beta \to \alpha$. Consideriamo un valore di $\alpha \in \mathcal{J}$ e poniamo $\beta = \alpha + u$, $z = \alpha + y$. Calcoliamo $\lim_{u \to 0} I(\alpha, \alpha + u)$ tramite la formula di Taylor:

$$w(\beta) - w(\alpha) = w'(\alpha) u + \frac{1}{2} w''(\alpha) u^2 + o(u^2),$$

inoltre

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) w(z) - z^2 (w(\beta) - w(\alpha)) = \\
= \; & \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) \left[w(\alpha) + w'(\alpha) y + \frac{1}{2} w''(\alpha) y^2 + o(y^2) \right] - \\
- \; & (\alpha^2 + 2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) = \\
= \; & (\beta^2 - \alpha^2)[w'(\alpha) y + \frac{1}{2} w''(\alpha) y^2] - (2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) + o(u^3) = \\
= \; & (u - y) u y (w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)) + o(u^3)\,.
\end{aligned}$$

Ottengo quindi che

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \to 0} I(\alpha, \alpha + u) = \frac{\sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}} \lim_{u \to 0} (1 + o(1)) \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \\
= \; & \frac{\pi \sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}}\,,
\end{aligned}$$

infatti, usando il cambio di variabili $x = \sqrt{uy - y^2}$, si ha

$$\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \frac{2}{u}\int_{-u/2}^{u/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4\frac{x^2}{u^2}}} = \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \pi \ .$$

In particolare l'ultimo integrale è indipendente da u. Elevando al quadrato si ottiene che w deve soddisfare l'equazione differenziale

$$q^2 \alpha w''(\alpha) + (1 - q^2) w'(\alpha) = 0 \ . \tag{4.21}$$

Ricordando la definizione di $w(z)$ si ottiene l'equazione a variabili separate

$$q^2 z \psi'(z) + (1 - q^2)\psi(z) = 0 \ . \tag{4.22}$$

Se $q^2 = 1$, dalla (4.22) si ha $\psi(z) = A$ e dunque

$$w(z) = 2Az + B, \tag{4.23}$$

con A, B costanti di integrazione ($A > 0$). Se $q^2 \neq 1$, ponendo $\sigma = 1/q^2$ abbiamo

$$\log \psi = \log z^{1-\sigma} + \log A, \qquad A > 0$$

e, passando agli esponenziali, $\psi(z) = Az^{1-\sigma}$, per cui

$$w(z) = \frac{2A}{2-\sigma} z^{2-\sigma} + B\,, \qquad B \in \mathbb{R}\,, \tag{4.24}$$

che per $\sigma = 1$ si riduce alla (4.23). Secondo passo: sostituendo l'espressione (4.24) di $w(z)$ con $B = 0$ in (4.20) si ha

$$I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma}}}{\sqrt{\alpha^2\beta^{2-\sigma} - \beta^2\alpha^{2-\sigma} + (\beta^2 - \alpha^2)z^{2-\sigma} - z^2(\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma})}} dz \ . \tag{4.25}$$

A questo punto passiamo al limite per $\alpha \to 0$, $\beta \to 1$ in (4.25). Distinguiamo due casi: a) $2 - \sigma > 0$; b) $2 - \sigma < 0$.[4] Nel caso a), usando la sostituzione $\zeta = z^{\sigma/2}$, otteniamo

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^{2-\sigma}(1 - z^\sigma)}} = 2q^2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = q^2\pi\,,$$

quindi $q = 1$, $\psi(z) = A$ ed $f(\rho) = -A/\rho^2$. Nel caso b) invece

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2}\,,$$

quindi $q = \frac{1}{2}$, $\psi(z) = Az^{-3}$ ed $f(\rho) = -A\rho$.

□

[4]Osservo che in entrambi i casi α, β possono assumere tutti i valori reali con $0 < \alpha < \beta < 1$. Infatti, posto $\mathcal{V}(z) = -\int \phi_k(z) dz = z^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{Az^{-\sigma}}{k^2(2-\sigma)}\right]$ e scelti arbitrariamente α, β con $0 < \alpha < \beta < 1$, possiamo trovare dei valori di k^2, h tali che α, β siano zeri consecutivi di $E - \mathcal{V}(z)$.

Capitolo 5

Il corpo rigido

Un **corpo rigido discreto**, denotato con $\mathfrak{C}$, è un sistema di N punti materiali $P_1, ..., P_N$ che mantengono invariate le loro distanze mutue durante il moto.

Fissato un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, i punti P_j sono individuati dai vettori $P_j - O$, con coordinate $\mathbf{x}_j$ nella base $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$. Le distanze mutue

$$\rho_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i| = c_{ij}, \qquad i, j = 1, ..., N.$$

tra i punti di $\mathfrak{C}$ sono costanti.

Esempio: due punti materiali vincolati rigidamente che si muovono in $\mathbb{R}^3$.

L'insieme delle configurazioni ammissibili formano una sottovarietà $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^6$ di dimensione 5. Infatti le configurazioni ammissibili $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ sono definite da $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$, con

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 - \ell^2, \qquad \ell > 0.$$

Poniamo $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Il vettore

$$\frac{\partial \Psi}{\partial(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 2\left((x_1 - x_2), (y_1 - y_2), (z_1 - z_2), (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\right)$$

è non nullo nei punti $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ tali che $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$. Ne segue che l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^6 : \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0\}$$

è una sottovarietà di $\mathbb{R}^6$ di dimensione $6 - 1 = 5$.

Quindi il vincolo di rigidità, almeno in questo semplice caso, è olonomo.

Definizione 9. *Diciamo che un sistema di riferimento $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ è* **solidale** *al corpo rigido $\mathfrak{C}$ se i punti P_j del corpo hanno tutti velocità nulla rispetto a Σ', cioè se le coordinate di tutti i punti P_j sono costanti in Σ'.*

Costruiamo esplicitamente un sistema di riferimento solidale.

Se tutti i punti di $\mathfrak{C}$ sono allineati ne prendiamo due, P_1 e P_2 e poniamo $O' = P_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$, $\hat{\mathbf{e}}'_2 \in \hat{\mathbf{e}}'^{\perp}_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}'_1 \times \hat{\mathbf{e}}'_2$. Le coordinate di ogni altro punto P_j di $\mathfrak{C}$ sono determinate univocamente dalle costanti c_{1j}, c_{2j}.

Se esistono tre punti, $P_1, P_2, P_3 \in \mathfrak{C}$ non allineati poniamo $O' = P_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$, $\hat{\mathbf{e}}'_2 \in \pi(P_1, P_2, P_3)$ (il piano generato dai tre punti) con $\hat{\mathbf{e}}'_2 \in \hat{\mathbf{e}}'^{\perp}_1$ e $(P_3 - P_1) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 > 0$. Infine $\hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}'_1 \times \hat{\mathbf{e}}'_2$.

Osserviamo che le coordinate di ogni altro punto P_j del corpo sono costanti[1] nel riferimento $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$. Quindi ci basta conoscere la posizione di P_1, P_2, P_3 per determinare quella degli altri punti del corpo.

Proposizione 16. *Se $\mathfrak{C}$ ha almeno tre punti non allineati, le configurazioni possibili formano una sottovarietà $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^{3N}$ diffeomorfa a $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.*

Dimostrazione. Sia $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ un riferimento solidale a $\mathfrak{C}$, costruito ad esempio come descritto sopra con tre punti del corpo non allineati.

L'immagine della mappa $\boldsymbol{\phi}$ descrive tutte le possibili coordinate dei vettori $P_h - O$ nella base $\mathcal{B}$ in quanto $\mathbf{x}_{O'} \in \mathbb{R}^3$ ed $R \in SO(3)$ descrivono tutte le possibili posizioni di un sistema di riferimento Σ' solidale a $\mathfrak{C}$ ().

Definiamo una mappa

$$\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \to \mathbb{R}^{3N}$$

tramite

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_N). \tag{5.1}$$

Nella (5.1) $\mathbf{x}_{O'}$ descrive le coordinate di $O' - O$ nella base $\mathcal{B} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, $\mathbf{x}'_h, h = 1 \ldots N$ sono le coordinate (costanti) dei vettori $P_j - O'$ nella base $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ ed R è l'inversa della matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ (cioè ha componenti $R_{ji} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$).

L'immagine della mappa $\boldsymbol{\phi}$ descrive tutte le possibili coordinate dei vettori $P_h - O$ nella base $\mathcal{B}$ in quanto $\mathbf{x}_{O'} \in \mathbb{R}^3$ ed $R \in SO(3)$ descrivono tutte le possibili posizioni di un sistema di riferimento Σ' solidale a $\mathfrak{C}$ (costruito ad esempio come descritto sopra, utilizzando tre punti del corpo non allineati).

Osserviamo che $\boldsymbol{\phi}$ è iniettiva, infatti se

$$\mathbf{x}^{(1)}_{O'} + R_1\mathbf{x}'_h = \mathbf{x}^{(2)}_{O'} + R_2\mathbf{x}'_h, \quad \forall\, h$$

allora

$$R_1(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j) = R_2(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j), \qquad R_1(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k) = R_2(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k)$$

[1]Osserviamo anche che le coordinate di ogni altro punto P_j $(j \geq 4)$ del corpo non sono univocamente determinate dalle costanti c_{1j}, c_{2j}, c_{3j} in quanto l'intersezione non vuota delle 3 sfere di centro P_i e raggio c_{ij}, $i = 1, 2, 3$ dà luogo genericamente a due punti. Comunque la continuità del moto di P_j implica che le sue coordinate in Σ' siano costanti.

con $\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_k$ vettori linearmente indipendenti. Ne segue che $R_1(R_2)^{-1}$, che è un elemento di $SO(3)$, ha due autovettori indipendenti relativi all'autovalore 1, dunque $R_1 = R_2$ e, di conseguenza, $\mathbf{x}^{(1)}_{O'} = \mathbf{x}^{(2)}_{O'}$.

La mappa $\boldsymbol{\phi}$ e la sua inversa, definita sull'immagine $\boldsymbol{\phi}(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$, sono differenziabili perché lineari. Quindi $\boldsymbol{\phi}$ è un diffeomorfismo sulla sua immagine. □

La varietà delle configurazioni di un corpo rigido con almeno tre punti non allineati ha dimensione 6, infatti $SO(3)$ è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^9$ di dimensione 3 (vedi Appendice, Proposizione 52).

Esercizio 4. *Dimostrare che se un corpo rigido è formato da punti allineati, l'insieme delle configurazioni possibili è diffeomorfo a* $\mathbb{R}^3 \times S^2$.

5.1 Proprietà cinematiche di un corpo rigido

Velocità angolare di un corpo rigido

Definizione 10. *Definiamo la velocità angolare* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ *di un corpo rigido come quella di minima norma tra le velocità angolari di tutti i sistemi di riferimento solidali rispetto ad un riferimento dato* Σ.

Si presentano due casi:

Proposizione 17. i) *Se* $\mathfrak{C}$ *ha almeno 3 punti non allineati allora la sua velocità angolare è quella di un qualunque riferimento solidale a* $\mathfrak{C}$. ii) *Se invece tutti i punti di* $\mathfrak{C}$ *sono allineati allora la sua velocità angolare è data dalla differenza tra quella di un qualunque riferimento solidale a* $\mathfrak{C}$ *e la sua componente in direzione dell'allineamento dei punti.*

Dimostrazione. Consideriamo due riferimenti solidali Σ', Σ''. Denotiamo con $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, $\vec{\boldsymbol{\omega}}'$ le velocità angolari di Σ' rispetto a Σ e di Σ'' rispetto a Σ' rispettivamente. i) La velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ è data da $\vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}'$. Se P_1, P_2, P_3 sono punti del corpo non allineati, dalla (2.5) applicata a $P_2 - P_1$ e a $P_3 - P_1$ si ha $\vec{\boldsymbol{\omega}}' \times (P_2 - P_1) = \vec{\boldsymbol{\omega}}' \times (P_3 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}$, per cui $\vec{\boldsymbol{\omega}}' = \vec{\mathbf{0}}$, quindi le velocità angolari di Σ' e Σ'' rispetto a Σ sono le stesse. ii) Si considerino due punti P_1, P_2 del corpo. Dalla (2.5) abbiamo $\vec{\boldsymbol{\omega}}' \times (P_2 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}$, quindi le velocità angolari di Σ e Σ' differiscono solo per una componente lungo la direzione di allineamento.

□

Formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi

Fissiamo un sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$.

Proposizione 18. *Siano* $\vec{\mathbf{x}}_h, \vec{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{V}^3$ *le posizioni di due punti* P_h, P_k *di un corpo rigido* $\mathfrak{C}$ *o ad esso solidali*[2] *e siano* $\vec{\mathbf{v}}_h, \vec{\mathbf{v}}_k$ *le loro rispettive velocità relative a* Σ. *Se*

[2] Affermare che un punto è solidale a $\mathfrak{C}$ ci dà un'informazione sulla sua velocità.

$\mathfrak{C}$ *è in moto con velocità angolare* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ *vale la formula*

$$\vec{\mathbf{v}}_k = \vec{\mathbf{v}}_h + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_k - P_h). \tag{5.2}$$

Dimostrazione.

$$\vec{\mathbf{v}}_k - \vec{\mathbf{v}}_h = \frac{d}{dt}(P_k - P_h)\Big|_\Sigma = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_k - P_h).$$

□

Le coordinate delle posizioni e velocità $(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N)$ di un corpo rigido $\mathfrak{C}$ sono determinate ad ogni istante t dalla posizione e velocità di un punto O' solidale al corpo al tempo t, da una matrice $R(t) \in SO(3)$ e dalla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ di $\mathfrak{C}$:

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_{O'} + R\,\mathbf{x}'_h, \qquad \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_{O'}).$$

Ad ogni istante t, $R(t)$ è l'inversa della matrice di cambiamento di base da Σ ad un riferimento solidale Σ'.

Asse istantaneo di rotazione

Definizione 11. *Se* $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \neq \mathbf{0}$ *è la velocità angolare di un corpo rigido all'istante* t*, si chiama* **asse istantaneo di rotazione** *una retta* $r(t)$ *fatta di punti solidali al corpo che hanno tutti velocità parallela ad* $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$ *oppure nulla.*

Dimostriamo che esiste un unico asse istantaneo di rotazione:

Proposizione 19. *Se* $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \neq 0$ *allora all'istante* t *esiste un punto* $P_0 = P_0(t)$ *tale che tutti i punti solidali al corpo rigido che si trovano a quell'istante sulla retta passante per* P_0 *e parallela ad* $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$ *hanno velocità parallela ad* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ *oppure nulla.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che dati due punti P_1, P_2 solidali al corpo, che all'istante t si trovano su una retta parallela ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$, si ha

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_2} = \vec{\mathbf{v}}_{P_1} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_2 - P_1) = \vec{\mathbf{v}}_{P_1}.$$

Quindi ci basta dimostrare che all'istante t esiste P_0 solidale al corpo con $\vec{\mathbf{v}}_{P_0}$ parallela ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

Sia O' solidale al corpo e sia π un piano ortogonale ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ e passante per O': determiniamo un punto $P_0 \in \pi$ solidale al corpo e tale che $\vec{\mathbf{v}}_{P_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}}$. Moltiplichiamo vettorialmente per $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ la relazione fondamentale per P_0 ed O':

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_0 - O')) \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + |\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2 (P_0 - O')$$

poiché $(P_0 - O') \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Imponendo che la velocità di P_0 sia parallela ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ otteniamo

$$P_0 - O' = -\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|^2} \vec{\mathbf{v}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Dalla dimostrazione costruttiva della sua esistenza segue anche l'unicità dell'asse istantaneo di rotazione. □

MOTO ELICOIDALE

Proposizione 20. *Le velocità dei punti solidali al corpo rigido hanno una simmetria cilindrica rispetto all'asse istantaneo di rotazione.*

Dimostrazione. Assumiamo che $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \neq 0$. Considero un operatore lineare $\mathcal{R}$ di rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione $r(t)$ e, dato un punto $P_1 \notin r(t)$ definisco $P_0 = r(t) \cap \Pi_{P_1}$ con Π_{P_1} il piano passante per P_1 e ortogonale a $r(t)$. Sia $P_2 = P_0 + \mathcal{R}(P_1 - P_0)$. Per la (5.2) si ha

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_1} = \vec{\mathbf{v}}_{P_0} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_1 - P_0), \qquad \vec{\mathbf{v}}_{P_2} = \vec{\mathbf{v}}_{P_0} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_2 - P_0).$$

Siccome $\vec{\mathbf{v}}_{P_0}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli all'asse,

$$\mathcal{R}\vec{\mathbf{v}}_{P_1} = \vec{\mathbf{v}}_{P_0} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathcal{R}(P_1 - P_0) = \vec{\mathbf{v}}_{P_2}.$$

Inoltre dalla (5.2) applicata ai punti P_1, P_0 segue che

$$\vec{\mathbf{v}}_{P_1} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

poiché $\vec{\mathbf{v}}_{P_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}}$ e $(P_1 - P_0) \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$.

Quindi, in coordinate cilindriche con asse $r(t)$, la componente radiale della velocità dei punti solidali al corpo rigido è nulla.

Inoltre, dati due punti P, Q solidali al corpo si ha

$$\vec{\mathbf{v}}_P \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{v}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}},$$

cioè la componente della velocità dei punti del corpo lungo l'asse istantaneo di rotazione è la stessa per tutti i punti.

A questo proposito si parla di **moto elicoidale**. □

TIPI PARTICOLARI DI MOTO RIGIDO

Un moto rigido si dice **piano** se la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ha direzione costante e tutti i punti solidali al corpo hanno velocità ortogonale a tale direzione, cioè

$$\vec{\mathbf{v}}_P \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0.$$

Posso dunque fissare un piano di riferimento Π ortogonale ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ in cui studiare il moto. Definisco il **centro istantaneo di rotazione** come il punto $C_0 = r(t) \cap \Pi$.

Proposizione 21. *(*Teorema di Chasles*) In un moto rigido piano il centro istantaneo di rotazione C_0 si trova sulla retta normale alla velocità di ciascuno dei punti solidali al corpo distinti da C_0.*

Dimostrazione. Sia C_0 il centro istantaneo di rotazione. Osservo che $\vec{\mathbf{v}}_{C_0} = \vec{\mathbf{0}}$, poiché $\vec{\mathbf{v}}_{C_0} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}}_C \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Quindi

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - C_0) \quad \Longrightarrow \quad (C_0 - P) \perp \vec{\mathbf{v}}_P.$$

□

Operatore di inerzia

Per studiare il moto di un corpo rigido $\mathfrak{C}$ è utile introdurre l'**operatore di inerzia** $\mathfrak{I}_Q : \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ rispetto al polo $Q \in \mathbb{E}^3$, definito da

$$\mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - Q)] , \qquad \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3.$$

Proposizione 22. *Per ogni scelta del polo Q l'operatore $\mathfrak{I}_Q : \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ è simmetrico e, se il corpo $\mathfrak{C}$ ha almeno tre punti non allineati, è definito positivo.*

Dimostrazione. Dalle proprietà del prodotto misto e dalla simmetria del prodotto scalare abbiamo la simmetria dell'operatore $\mathfrak{I}_Q$, infatti

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{v}} = \sum_{h=1}^{N} m_h \, [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - Q)] \cdot [\vec{\mathbf{v}} \times (P_h - Q)]$$

Similmente si ha

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{u}} = \sum_{h=1}^{N} m_h |\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - Q)|^2$$

e, se ci sono tre punti non allineati, almeno un addendo della sommatoria è > 0. Se tutti i punti del corpo sono allineati ed $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ corrisponde alla direzione della retta di allineamento, allora $\hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{\boldsymbol{\xi}} = 0$ se Q sta su tale retta.

□

Scomposizione dell'operatore di inerzia

Si verifica facilmente che

$$\mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{u}} = \mathfrak{I}_B \vec{\mathbf{u}} + m(B - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (B - Q)], \qquad \forall \vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3, \tag{5.3}$$

infatti

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_Q \vec{\mathbf{u}} &= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - Q)] = \\
&= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - B)] + \sum_{h=1}^{N} m_h (B - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - B)] + \\
&+ \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (B - Q)] + \sum_{h=1}^{N} m_h (B - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (B - Q)]
\end{aligned}$$

e si ha

$$\sum_{h=1}^{N} m_h (B - Q) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (P_h - B)] = \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - B) \times [\vec{\mathbf{u}} \times (B - Q)] = \vec{\mathbf{0}}.$$

Dati un punto $Q \in \mathbb{E}^3$ ed una direzione $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{V}^3, |\hat{\mathbf{e}}| = 1$, definiamo **momento di inerzia** relativo all'asse $Q\hat{\mathbf{e}}$, passante da Q e parallelo a $\hat{\mathbf{e}}$, la quantità

$$I_{Q\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}.$$

Osservo che se Q' è un punto dell'asse $Q\hat{\mathbf{e}}$ si ha

$$I_{Q'\hat{\mathbf{e}}} = \sum_{h=1}^{N} m_h |\hat{\mathbf{e}} \times (P_h - Q')|^2 = \sum_{h=1}^{N} m_h |\hat{\mathbf{e}} \times [(P_h - Q) + (Q - Q')]|^2 = I_{Q\hat{\mathbf{e}}}.$$

Abbiamo il seguente

Proposizione 23. (Huygens-Steiner) *Il momento di inerzia $I_{B\hat{\mathbf{e}}}$ rispetto all'asse $B\hat{\mathbf{e}}$ ha la seguente proprietà:*

$$I_{B\hat{\mathbf{e}}} = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} I_{Q\hat{\mathbf{e}}}.$$

Dimostrazione. Dalla (5.3) segue che $I_{Q\hat{\mathbf{e}}} = I_{B\hat{\mathbf{e}}} + m|\hat{\mathbf{e}} \times (B - Q)|^2$. □

MATRICE DI INERZIA

Fissata una base, $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ l'operatore di inerzia $\mathfrak{I}_Q$ si scrive tramite la seguente matrice

$$I_Q = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}, \qquad I_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Più precisamente si ha

$$I_{11} = \sum_{h=1}^{N} m_h (y_h^2 + z_h^2)\,; \quad I_{22} = \sum_{h=1}^{N} m_h (x_h^2 + z_h^2)\,; \quad I_{33} = \sum_{h=1}^{N} m_h (x_h^2 + y_h^2)\,;$$
$$I_{12} = -\sum_{h=1}^{N} m_h x_h y_h\,; \qquad I_{13} = -\sum_{h=1}^{N} m_h x_h z_h\,; \qquad I_{23} = -\sum_{h=1}^{N} m_h y_h z_h\,;$$

con $P_h - Q = x_h \hat{\mathbf{e}}_1 + y_h \hat{\mathbf{e}}_2 + z_h \hat{\mathbf{e}}_3$, $h = 1 \ldots N$. Infatti

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^{N} m_h \hat{\mathbf{e}}_i \times (P_h - Q) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \times (P_h - Q),$$

con

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 \times (P_h - Q) &= y_h \hat{\mathbf{e}}_3 - z_h \hat{\mathbf{e}}_2, \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \times (P_h - Q) &= z_h \hat{\mathbf{e}}_1 - x_h \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \times (P_h - Q) &= x_h \hat{\mathbf{e}}_2 - y_h \hat{\mathbf{e}}_1. \end{aligned}$$

SIMMETRIE E MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA

La matrice di inerzia è simmetrica, dunque è diagonalizzabile in una base ortonormale $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$. Gli autovalori dell'operatore di inerzia I_1, I_2, I_3 si chiamano **momenti principali di inerzia**, una base $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ in cui I_Q si scrive in forma diagonale e le direzioni degli $\hat{\mathbf{e}}'_j$ si dicono rispettivamente base e direzioni principali di inerzia.

Dimostriamo alcune proprietà dei momenti e degli assi principali di inerzia:

Proposizione 24. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) *Se esiste un piano π_Q passante per Q di simmetria per riflessione (cioè, detta $\tilde{\mathcal{R}}_\pi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione rispetto a π_Q, ad ogni punto P di massa m del corpo corrisponde un altro punto $\tilde{\mathcal{R}}_\pi P$ del corpo con la stessa massa) allora la direzione ortogonale a π è principale.*

(ii) *Se esiste un asse r di simmetria per rotazione passante per Q (cioè, per ogni punto P di massa m del corpo esiste un intero $k > 1$ tale che, detta $\mathcal{R}_k : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la rotazione di $2\pi/k$ attorno ad r, i punti dell'orbita $\{\mathcal{R}_k^h P\}_{h=0\ldots k-1}$ di P sotto l'azione del gruppo ciclico generato da $\mathcal{R}_k$ corrispondono ad altri punti del corpo con la stessa massa m) allora la direzione di r è principale.*

Inoltre, se $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ è una base principale per $\mathfrak{I}_Q$:

(iii) *I momenti principali di inerzia soddisfano $I_1 \le I_2 + I_3$ e si ha $I_1 = I_2 + I_3$ solo quando il corpo rigido è piano, e sta nel piano $Q\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$.*

(iv) *Sia $\vec{\mathbf{v}}$ un autovettore dell'operatore di inerzia $\mathfrak{I}_Q$.*

1. *Se $\vec{\mathbf{v}} = v_i\hat{\mathbf{e}}'_i + v_j\hat{\mathbf{e}}'_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \ne j$ e $v_i v_j \ne 0$, allora tutti i vettori del piano generato da $\hat{\mathbf{e}}'_i, \hat{\mathbf{e}}'_j$ definiscono direzioni principali di inerzia.*
2. *Se $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^3 v_j\hat{\mathbf{e}}'_j$, $v_j \ne 0$ $\forall j$, allora $\mathfrak{I}_Q$ è un multiplo dell'operatore identità (quindi tutte le direzioni sono principali).*

Dimostrazione. (i) Considero un riferimento $Q\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ con asse $\hat{\mathbf{e}}'_3$ ortogonale a π_Q ed osservo che $I_{31} = I_{32} = 0$.
(ii) Considero un riferimento $Q\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$ con asse $Q\hat{\mathbf{e}}'_3 = r$ ed osservo che $I_{31} = I_{32} = 0$. Infatti possiamo trovare r interi $k_1, \ldots, k_r$, dove ogni k_j è > 1 e $\sum_{j=1}^r k_j = N$, tali che

$$I_{31} + iI_{32} = -\sum_{h=1}^{N} m_h(x_h + iy_h)z_h = -\sum_{j=1}^{r} m_j z_j \sum_{l=0}^{k_j-1} \omega_{k_j}^l (x_j + iy_j)$$

dove $\omega_k = e^{2\pi i/k}$. Si conclude utilizzando il fatto che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{h=0}^{k-1} \omega_k^h = \frac{\omega_k^k - 1}{\omega_k - 1} = 0.$$

(iii) Segue direttamente dalle formule per $I_{j,j}$, $j = 1, 2, 3$.
(iv) Dalle relazioni $\mathfrak{I}_Q\hat{\mathbf{e}}'_j = I_j\hat{\mathbf{e}}'_j$, $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^3 v_j\hat{\mathbf{e}}'_j$ si ha

$$\sum_{j=1}^{3} v_j I_j \hat{\mathbf{e}}'_j = \mathfrak{I}_Q\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{3} v_j\lambda\hat{\mathbf{e}}'_j.$$

Dall'unicità della rappresentazione di un vettore come combinazione lineare degli elementi della base abbiamo $\lambda = I_j$ se $v_j \neq 0$. Da qui segue la tesi, infatti se $\mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}'_i = \lambda \hat{\mathbf{e}}'_i$, $\mathfrak{I}_Q \hat{\mathbf{e}}'_h = \lambda \hat{\mathbf{e}}'_h$, con $i \neq h$ allora ogni combinazione lineare $\alpha \hat{\mathbf{e}}'_i + \beta \hat{\mathbf{e}}'_h$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) è un autovettore di $\mathfrak{I}_Q$ con autovalore λ. Se inoltre troviamo un autovettore $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{3} v_j \hat{\mathbf{e}}'_j$ con $v_1 v_2 v_3 \neq 0$ allora $I_1 = I_2 = I_3$ e la matrice di inerzia è un multiplo dell'identità.

$\square$

Esercizio 5. *Consideriamo un corpo rigido costituito da N punti di uguale massa m, posti ai vertici dei poliedri platonici ($N = 12, 24, 60$). Dimostrare che ogni direzione è principale per l'operatore di inerzia $\mathfrak{I}_B$ rispetto al baricentro B,*

Esercizio 6. *Se $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$ è una base principale per $\mathfrak{I}_Q$, lo è anche per $\mathfrak{I}_P$ con $P \neq Q$?*

5.2 Proprietà dinamiche di un corpo rigido

Quantità dinamiche e operatore di inerzia

Fissiamo un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$. Dato un corpo rigido $\mathfrak{C}$, usando la formula fondamentale (5.2) abbiamo

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_Q &= \sum_{h=1}^{N} m_h (P_h - Q) \times [\vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_h - O')] = \qquad (5.4) \\ &= m(B - Q) \times \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}} + m(B - Q) \times [\boldsymbol{\omega} \times (Q - O')]. \end{aligned}$$

Osservo che nella (5.4) il polo O' si deve muovere come un punto solidale a $\mathfrak{C}$.

Scegliendo $O' = Q$ nella (5.4) si ha

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = m(B - Q) \times \vec{\mathbf{v}}_Q + \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

che per $\vec{\mathbf{v}}_Q = \mathbf{0}$ oppure per $Q = B$ si semplifica:

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \mathfrak{I}_Q \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Utilizzando la (5.2) possiamo anche rappresentare l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{\mathbf{v}}_{O'}|^2 + m \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot (B - O') \times \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathfrak{I}_{O'} \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

Se scegliamo $O' = B$ otteniamo la versione per i corpi rigidi del teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{\mathbf{v}}_B|^2 + \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathfrak{I}_B \vec{\boldsymbol{\omega}}. \qquad (5.5)$$

5.3 I corpi rigidi continui

Si distinguono corpi continui a 1, 2 e 3 dimensioni, a cui si attribuiscono rispettivamente una densità lineare, di superficie e di volume, denotate con λ, σ, ρ. Cosideriamo l'ultimo caso, che è il più generale. La discussione relativa agli altri casi è simile.

Consideriamo la densità di volume

$$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \qquad \mathbf{x}' \mapsto \rho(\mathbf{x}')$$

dove $\mathbf{x}'$ sono coordinate in un riferimento solidale Σ'. Assumiamo che ρ sia integrabile sull'insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ delle coordinate dei punti del corpo relative a Σ'.

Se il corpo rigido non è soggetto ad altri vincoli, una parametrizzazione locale dei punti del corpo è data dalla mappa

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \tag{5.6}$$

con $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\theta})$ ed $R = R(\boldsymbol{\theta})$, dove $\boldsymbol{\theta}$ sono gli angoli di Eulero (vedi Sezione 9).

La mappa (5.6) si può sollevare ai vettori velocità, ottenendo

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \boldsymbol{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \tag{5.7}$$

con $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{v}_{O'}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$.

Introduciamo le definizioni delle quantità dinamiche sostituendo alla somma finita l'integrale sull'insieme C occupato dal corpo. L'insieme C viene definito in un riferimento solidale al corpo, in modo che C non cambi col tempo.

Massa totale

$$m = \int_C \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

Baricentro

$$m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' = R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' \tag{5.8}$$

Osservazione 13. *Se $O' = B$ si ottiene*

$$\int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = \mathbf{0}.$$

Quantità di moto

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_C \rho(\mathbf{x}') \boldsymbol{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = m\mathbf{v}_{O'} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) \end{aligned}$$

Osservazione 14. *Se $O' = B$ si ottiene*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_B.$$

Momento angolare rispetto a $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q};\mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \end{aligned} \tag{5.9}$$

Introduciamo la matrice di inerzia I_Q, definita da

$$\begin{aligned} I_Q\mathbf{u} &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q};\mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q};\mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q)]d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q)]d\mathbf{x}' \end{aligned} \tag{5.10}$$

per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Se $O' = Q$ la (5.10) assume l'espressione più semplice

$$I_Q\mathbf{u} = \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times (\mathbf{u} \times R\mathbf{x}')d\mathbf{x}'.$$

Scegliendo $O' = Q$ nella (5.9) si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}'d\mathbf{x}' \times \mathbf{v}_Q + I_Q\boldsymbol{\omega} = \\ &= m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}_Q + I_Q\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Energia cinetica

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_C \rho(\mathbf{x}')|\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}' = \frac{1}{2}\int_C \rho(\mathbf{x}')|\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'|^2 d\mathbf{x}' = \\ &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2 + \int_C \rho(\mathbf{x}')\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'d\mathbf{x}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'}\boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{O'}|^2 + m\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'}\boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Osservazione 15. *Se $O' = B$ si ottiene*

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_B\boldsymbol{\omega}.$$

Esercizio 7. *Mostrare che vale il teorema di scomposizione di* $\mathbf{M}_Q$

Si introduce la densità di forza $\mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')$

Risultante delle forze

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')d\mathbf{x}'$$

Momento risultante delle forze rispetto a $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\mathbf{N}_Q = \int_C (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q};\mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')d\mathbf{x}'$$

Se $O' = Q$ si ottiene l'espressione più semplice

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R\mathbf{x}' \times \mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')d\mathbf{x}'.$$

Esempio 5. *(forza di gravità) Con una scelta opportuna del riferimento abbiamo*

$$\mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3,$$

per cui la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = -mg\mathbf{e}_3,$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo Q è (scegliendo $O' = Q$ e usando la relazione (5.8))

$$\mathbf{N}_Q = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times (-mg\mathbf{e}_3).$$

Esempio 6. *(forza centrifuga) Se $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare abbiamo*

$$\mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'),$$

per cui la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'})),$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo Q è (scegliendo $O' = Q$)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= -\int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'))\,d\mathbf{x}' = \\ &= -\int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\omega} \cdot R\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega}\,d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

5.4 Esempi di matrici principali di inerzia

asta omogenea di lunghezza ℓ e massa m;
Sia B il baricentro dell'asta. Considero un sistema di riferimento solidale all'asta, centrato in O e con l'asta lungo l'asse $O\mathbf{e}_1$. Allora la matrice di inerzia I_B, relativa al polo B si scrive

$$I_B^{asta} = \frac{m\ell^2}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

DISCO ED ANELLO OMOGENEI DI RAGGIO R E DI MASSA m;

$$I_B^{disco} = \frac{mR^2}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad I_B^{anello} = mR^2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

SFERA PIENA E VUOTA, OMOGENEE, DI RAGGIO R E DI MASSA m;

$$I_B^{sp} = \frac{2mR^2}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_B^{sv} = \frac{2mR^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

CILINDRO PIENO E VUOTO, OMOGENEI, DI RAGGIO R, DI ALTEZZA h E DI MASSA m;

$$I_B^{cp} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix};$$

$$I_B^{cv} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix};$$

5.5 Equazioni cardinali e moti rigidi

Richiamiamo le due equazioni cardinali della dinamica per un sistema di N punti materiali (3.9):

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_B & = \mathbf{R}^{(\mathrm{E})} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q & = -m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(\mathrm{E})} \end{cases} . \tag{5.11}$$

Possiamo usare le equazioni (5.11) per determinare il moto di un corpo rigido, anche soggetto ad altri vincoli. Consideriamo un esempio semplice e determiniamo le equazioni del moto in diversi modi.

Esempio 7. *In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$, con asse Oy verticale ascendente. Si studi il moto di un'asta omogenea di lunghezza 2ℓ e massa m che scivola mantenendo gli estremi sui due assi coordinati Ox, Oy.*

Si assume che gli assi coordinati sviluppino delle forze $\Phi_1\mathbf{e}_1, \Phi_2\mathbf{e}_2$, dette reazioni vincolari, sugli estremi dell'asta. Le componenti Φ_1, Φ_2 sono tra le incognite del problema. Per determinare la configurazione dell'asta basta specificare l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale. La velocità angolare dell'asta è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$.

Siamo interessati a scrivere delle equazioni che abbiano una forma semplice e che, se possibile, siano **equazioni pure**, cioè non contengano reazioni vincolari.

Scriviamo la 2^a equazione cardinale per l'asta facendo 3 scelte diverse per il polo Q.

i) $Q = O$, l'origine del riferimento:

$$\dot{\mathbf{M}}_O = -m\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_O = \mathbf{N}_O; \tag{5.12}$$

ii) $Q = B$, il baricentro dell'asta:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = -m\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_B = \mathbf{N}_B; \tag{5.13}$$

iii) $Q = C_0$, il centro istantaneo di rotazione:

$$\dot{\mathbf{M}}_{C_0} = -m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_{C_0} = \mathbf{N}_{C_0}. \tag{5.14}$$

Osservazione 16. *Al variare di θ il centro istantaneo di rotazione C_0 è un punto sempre diverso in un riferimento solidale al corpo, oltre che nel riferimento Σ. Le coordinate di C_0 in Σ sono*

$$\mathbf{x}_{C_0} = 2\ell(\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2),$$

quindi il termine $-m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B$ è nullo perchè

$$\mathbf{v}_{C_0} = \dot{\theta}\ell(\cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2) \tag{5.15}$$

è parallelo a $\mathbf{v}_B$. Quando usiamo la formula fondamentale della cinematica (5.2) con il centro istantaneo di rotazione C_0 abbiamo $\mathbf{v}_{C_0} = \mathbf{0}$; questo perchè stiamo considerando la velocità di un punto solidale al corpo, cioè stiamo calcolando il limite del rapporto incrementale in cui appaiono le coordinate dello stesso punto del corpo a due tempi diversi, quindi non possiamo usare la (5.15). Nell'Esempio 7 la confusione tra le due velocità non produce effetti sulla forma dell'equazione, ma non è sempre così. Questa difficoltà nasce dalla notazione utilizzata tradizionalmente, che è la stessa per le due velocità.

La iii) è l'unica equazione pura, cioè in essa non appaiono le reazioni vincolari, infatti

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_O &= \mathbf{x}_A \times \Phi_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_C \times \Phi_2\mathbf{e}_2 - \mathbf{x}_B \times mg\mathbf{e}_2 = \\
&= (-2\cos\theta\Phi_1 + 2\sin\theta\Phi_2 - mg\sin\theta)\ell\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{N}_B &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \times \Phi_1\mathbf{e}_1 + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) \times \Phi_2\mathbf{e}_2 = \\
&= \ell(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2) \times (-\Phi_1\mathbf{e}_1 + \Phi_2\mathbf{e}_2) = \\
&= (\Phi_2\sin\theta - \Phi_1\cos\theta)\ell\mathbf{e}_3, \\
\mathbf{N}_{C_0} &= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times (-mg\mathbf{e}_2) = \mathbf{x}_B \times mg\mathbf{e}_2 = \\
&= mg\ell\sin\theta\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

L'equazione iii) appare la scelta più conveniente. Comunque è utile risolvere il problema nei tre modi diversi.

Nel caso i), usando la formula fondamentale (5.2), abbiamo

$$\mathbf{M}_O = m\mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O + I_O\boldsymbol{\omega}. \tag{5.16}$$

Notare che qui $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$ poichè corrisponde alla velocità di O come punto solidale al corpo rigido. Al variare di θ l'origine O ha coordinate diverse in un riferimento solidale, ma nella (5.16) $\mathbf{v}_O$ si deve intendere come la velocità di un punto solidale; per calcolarla possiamo usare nuovamente la formula fondamentale (5.2) nel modo seguente:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_B = 2\mathbf{v}_B = 2\ell\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2).$$

Inoltre, con il teorema di Huygens-Steiner, otteniamo

$$I_O\boldsymbol{\omega} = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

Abbiamo dunque

$$\mathbf{M}_O = -2m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

In alternativa si può calcolare il momento angolare $\mathbf{M}_O$ come segue:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_B + \mathbf{x}_B \times m\mathbf{v}_B = \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3 - m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

In questo modo sparisce l'ambiguità di notazione, che nasceva dal fatto di calcolare la velocità di un punto solidale al corpo (il punto O), ma sempre diverso al variare di θ.

Dalla (5.12) si ottiene

$$-\frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = (-2\cos\theta\Phi_1 + 2\sin\theta\Phi_2 - mg\sin\theta)\ell. \tag{5.17}$$

Possiamo eliminare le reazioni vincolari Φ_1, Φ_2 dalla (5.17) utilizzando la prima equazione cardinale proiettata lungo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_1 = m\ell(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta), && (5.18)\\ \Phi_2 - mg &= m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_2 = m\ell(\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta). && (5.19)\end{aligned}$$

Sostituendo (5.18), (5.19) nella (5.17) otteniamo l'equazione del moto:

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\sin\theta. \tag{5.20}$$

Nel caso ii) abbiamo

$$\mathbf{M}_B = I_B\boldsymbol{\omega} = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

per cui dalla (5.13) si ottiene l'equazione

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} = (\Phi_2\sin\theta - \Phi_1\cos\theta)\ell. \tag{5.21}$$

Sostituendo (5.18), (5.19) nella (5.21) si ottiene l'equazione del moto (5.20).

Nel caso iii) abbiamo

$$\mathbf{M}_{C_0} = \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_{C_0} - \mathbf{x}_B) \times m\mathbf{v}_B = \mathbf{M}_B - \mathbf{x}_B \times m\mathbf{v}_B = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3,$$

e dalla (5.14) si ottiene subito l'equazione (5.20).

Esercizio 8. *Si studi il moto di un disco omogeneo di raggio R e massa m che rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α rispetto a $O\hat{\mathbf{e}}_1$.*

5.6 Conservazione dell'energia ed equazioni del moto

Dal teorema dell'energia cinetica abbiamo

$$\dot{T} = \Pi, \tag{5.22}$$

dove

$$\Pi = \sum_{h=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_h \cdot \vec{\mathbf{v}}_h = \sum_{h=1}^{n} \mathbf{F}_h \cdot [\vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P_h - O')] = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{(E)} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Nel caso di corpi rigidi continui otteniamo lo stesso risultato usando (5.7) e l'ipotesi che la risultante delle forze interne sia nulla:

$$\Pi = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(E)} \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{5.23}$$

Nell'equazione della variazione dell'energia cinetica (5.22) si possono quindi usare sistemi di forze equivalenti a quelli dati, sia per i corpi rigidi discreti che per quelli continui.

Usiamo la conservazione dell'energia per scrivere le equazioni del moto del sistema dell'Esempio 7.

Le reazioni vincolari sono a potenza nulla, per ogni velocità possibile. La potenza della forza di gravità è la derivata totale rispetto al tempo di $-V$, con $V = mgy$. Derivando rispetto a t l'equazione dell'energia

$$E = T + V = \frac{4}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta$$

si ottiene

$$\dot{E} = \left[\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell\sin\theta\right]\dot{\theta} = 0.$$

Da questa si ottengono due equazioni: la prima, $\dot{\theta} = 0$, dice semplicemente che l'energia si conserva nelle configurazioni di equilibrio. La seconda ci fornisce l'equazione di moto:

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell\sin\theta = 0.$$

Esercizio 9. *Scrivere l'equazione del moto per il disco che rotola su un piano inclinato (esempio 8).*

5.7 Equazioni di Eulero per il Corpo Rigido con un punto fisso

Fissiamo un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_3$, che possiamo assumere inerziale, e scriviamo le equazioni che descrivono il moto di un corpo rigido $\mathfrak{C}$ con un punto fisso O. La seconda equazione cardinale in questo caso è sufficiente per determinare il moto:

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{M}}_O\Big|_\Sigma = \vec{\mathbf{N}}_O. \tag{5.24}$$

Sia $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ la velocità angolare del corpo rigido e consideriamo un sistema di riferimento principale $\Sigma' = O'\hat{\mathbf{e}}'_1\hat{\mathbf{e}}'_2\hat{\mathbf{e}}'_3$, solidale a $\mathfrak{C}$ e centrato nel punto $O' = O$. Assumiamo inoltre che la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ sia $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, cioè che Σ' abbia la velocità angolare di minima norma tra quella di tutti i riferimenti solidali.[3]

Dalla (2.5) otteniamo

$$\frac{d\vec{\mathbf{M}}_O}{dt}\Big|_{\Sigma'} = \vec{\mathbf{M}}_O \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\mathbf{N}}_O. \tag{5.25}$$

Usando la relazione

$$\vec{\mathbf{M}}_O = \mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

otteniamo le equazioni di Eulero

$$\mathfrak{I}_O\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} = \mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\mathbf{N}}_O, \tag{5.26}$$

in cui possiamo scrivere senza ambiguità $\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}$ per la derivata temporale di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ in Σ' dato che è uguale a quella in Σ.

5.8 Moto per inerzia (Euler-Poinsot)

Definizione 12. *Chiamiamo* **moti per inerzia** *le soluzioni di*

$$\mathfrak{I}_O\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} = \mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}, \tag{5.27}$$

cioè le soluzioni delle equazioni di Eulero (5.26) con $\vec{\mathbf{N}}_O = \vec{\mathbf{0}}$.

Rientrano in questo caso i moti di un corpo rigido pesante (cioè soggetto alla forza di gravità) vincolato al baricentro, ma anche un corpo rigido pesante libero di muoversi nello spazio. Per quest'ultimo basta studiare il moto nel sistema di riferimento del baricentro, che quindi diventa un punto fisso).

[3] Questa ultima ipotesi serve a includere nella trattazione i corpi costituiti da punti tutti allineati.

Rappresentiamo la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, il momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$ ed il momento della forza $\vec{\mathbf{N}}_O$ in coordinate nella base $\mathcal{B}' = \{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h\, \hat{\mathbf{e}}'_h, \qquad \vec{\mathbf{M}}_O = \sum_{h=1}^{3} M_h\, \hat{\mathbf{e}}'_h = \sum_{h=1}^{3} I_h\, \omega_h\, \hat{\mathbf{e}}'_h, \qquad \vec{\mathbf{N}}_O = \sum_{h=1}^{3} \mathbf{N}_h\, \hat{\mathbf{e}}'_h.$$

Le equazioni (5.27), scritte in coordinate nella base $\mathcal{B}'$, diventano

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_1\dot{\omega}_1 & = & \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) \\ I_2\dot{\omega}_2 & = & \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) \\ I_3\dot{\omega}_3 & = & \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) \end{array} \right. . \tag{5.28}$$

Si può descrivere la soluzione generale di queste equazioni tramite l'uso di funzioni speciali, vedi [18].

È interessante ottenere una descrizione delle soluzioni dal punto di vista geometrico utilizzando solo gli integrali primi della norma del momento angolare e dell'energia (in questo caso solo cinetica, poiché la potenza della reazione vincolare è nulla, infatti l'unica velocità possibile per O è quella nulla). Per questo introduciamo la seguente

Definizione 13. *L'insieme*

$$\mathcal{E}_O = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}^3 : \vec{\mathbf{x}} \cdot \mathfrak{I}_O\vec{\mathbf{x}} = 1\}$$

si dice **ellissoide di inerzia** *relativo al punto O.*

Nella base $\mathcal{B}'$ l'equazione dell'ellissoide di inerzia si scrive

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 1,$$

quindi gli assi principali dell'ellissoide sono diretti lungo le direzioni principali di inerzia e la loro lunghezza è $1/\sqrt{I_j}$, $j = 1, 2, 3$.

Proposizione 25. *(Poinsot) In una precessione per inerzia, con punto fisso O, l'ellissoide di inerzia relativo al polo O rotola senza strisciare su un piano fisso perpendicolare al vettore momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$.*

In questo caso l'energia totale corrisponde all'energia cinetica:

$$E = T = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}},$$

in cui $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è la velocità angolare del corpo. Il vettore $\vec{\boldsymbol{\xi}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}/\sqrt{2E}$ ci dà l'intersezione di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ con l'ellissoide di inerzia $\mathcal{E}_O$.

Si osserva che

1. il piano tangente all'ellissoide nel punto individuato da $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ è ortogonale a $\vec{\mathbf{M}}_O$, infatti
$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} \cdot I_O\mathbf{x}) = 2I_O\mathbf{x}$$
e, sostituendo $\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}/\sqrt{2E}$ abbiamo $I_O\boldsymbol{\omega}\sqrt{2/E} = \mathbf{M}_O\sqrt{2/E}$;

2. la distanza di tale piano da O è costante, infatti questa è data da

$$\frac{\vec{\boldsymbol{\xi}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_O}{|\vec{\mathbf{M}}_O|} = \frac{\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}}{\sqrt{2E}|\vec{\mathbf{M}}_O|} = \frac{\sqrt{2E}}{|\vec{\mathbf{M}}_O|};$$

3. la velocità del punto dell'ellissoide a contatto col piano è nulla, infatti l'ellissoide è solidale al corpo e $O\vec{\boldsymbol{\xi}}$ è l'asse istantaneo di rotazione. Siccome $\vec{\mathbf{v}}_O = \vec{\mathbf{0}}$, tutti i punti del corpo su $O\vec{\boldsymbol{\xi}}$ hanno velocità nulla.

Si chiama **poloide** la curva tracciata sulla superficie dell'ellissoide di inerzia, definita dai punti dell'ellissoide a contatto con il piano fisso); si chiama invece **erpoloide** la curva, tracciata sul piano fisso, definita dal punto di contatto tra l'ellissoide di inerzia e il piano.

Esaminiamo in dettaglio il caso perfettamente simmetrico ($I_1 = I_2 = I_3$), il caso a simmetria giroscopica ($I_1 = I_2 \neq I_3$) e quello generale ($I_1 > I_2 > I_3$).

Caso 1: $I_1 = I_2 = I_3 = I$

Questo è il caso di un corpo sferico omogeneo o comunque di un corpo con distribuzione di massa a simmetria sferica, per esempio un corpo formato da 8 masse uguali disposte ai vertici di un cubo, vedi Esercizio 5.

Abbiamo la relazione

$$\vec{\mathbf{M}}_O = I\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \tag{5.29}$$

Siccome $\vec{\mathbf{M}}_O$ è un integrale primo nel sistema di riferimento inerziale anche $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{M}}_O/I$ è costante lungo le orbite, quindi *il moto per inerzia è un moto rotatorio uniforme attorno a un asse fisso nello spazio (nel riferimento inerziale)*, cheè l'asse istantaneo di rotazione.

Il vettore $\vec{\mathbf{M}}_O$ è costante anche nel sistema di riferimento solidale al corpo: questo segue dalla (5.29) e dalle equazioni di Eulero (5.28), che in questo caso diventano

$$I_1\,\dot{\omega}_1 = I_2\,\dot{\omega}_2 = I_3\,\dot{\omega}_3 = 0.$$

Il fatto che $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sia costante anche nel riferimento solidale segue anche dalla (2.5).

Caso 2: $I_1 = I_2 \neq I_3$

In questo caso $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ non è più costante, ma valgono le seguenti proprietà:

1. $|\vec{\boldsymbol{\omega}}|$ è costante;
2. il momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$, la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ e l'asse $\hat{\mathbf{e}}_3'$ sono complanari;
3. gli angoli tra due qualsiasi dei vettori $\vec{\mathbf{M}}_O, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\mathbf{e}}_3'$ sono costanti.

Osservazione 17. *La terza proprietà ci dice in particolare che sono costanti le componenti del vettore velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sui vettori $\hat{\mathbf{e}}_3'$ ed $\vec{\mathbf{M}}_O$.*

Dimostrazione. Le equazioni di Eulero si scrivono nel modo seguente

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3(I_1 - I_3) \\ I_1\dot{\omega}_2 &= \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) \\ I_3\dot{\omega}_3 &= 0 \end{cases} \tag{5.30}$$

dunque otteniamo

$$\omega_3 = \text{ costante} \qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{ costante},$$

per cui è costante anche $|\boldsymbol{\omega}|$.

Siano α l'angolo tra $\vec{\mathbf{M}}_O$ ed $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, β l'angolo tra $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ed $\hat{\mathbf{e}}'_3$ e γ l'angolo tra $\vec{\mathbf{M}}_O$ ed $\hat{\mathbf{e}}'_3$. Scriviamo le espressioni dei coseni di tali angoli:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}}{|\vec{\mathbf{M}}_O|\,|\vec{\boldsymbol{\omega}}|} = \frac{2E}{|\vec{\mathbf{M}}_O|\,|\vec{\boldsymbol{\omega}}|} \\ \cos\beta &= \frac{\omega_3}{|\vec{\boldsymbol{\omega}}|} \\ \cos\gamma &= \frac{M_3}{|\vec{\mathbf{M}}_O|} = \frac{I_3\,\omega_3}{|\vec{\mathbf{M}}_O|} \end{aligned}$$

Usando il punto (1) e la conservazione dell'energia e della lunghezza del momento angolare (anche nel sistema di riferimento solidale) otteniamo che $\cos\alpha$ è costante. Dal punto (1) segue immediatamente che anche $\cos\beta$ è costante. La dimostrazione che $\cos\gamma$ è costante si fa in modo analogo.

Il fatto che i vettori $\vec{\mathbf{M}}_O$, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, $\hat{\mathbf{e}}'_3$ siano coplanari durante il moto si ottiene dalla relazione

$$\det\begin{pmatrix} I_1\,\omega_1 & I_1\,\omega_2 & I_3\,\omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

□

Proposizione 26. *Si consideri il moto di un corpo rigido $\mathfrak{C}$ con un punto fisso O avente struttura giroscopica attorno all'asse $\hat{\mathbf{e}}'_3$. Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ruota uniformemente attorno alla direzione fissa del momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$ descrivendo un cono di rotazione $\mathcal{C}'$ con velocità angolare costante. Analogamente la traccia di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ sul corpo $\mathfrak{C}$ descrive un cono di rotazione $\mathcal{C}''$ con velocità angolare costante. Considerando $\mathcal{C}'$ fisso e $\mathcal{C}''$ solidale al corpo rigido, si ha che i due coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare (*moto alla Poinsot*).*

Dimostrazione. Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ descrive un cono in entrambi i sistemi di riferimento poiché per la proposizione precedente l'angolo tra $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ed $\vec{\mathbf{M}}_O$ e l'angolo tra $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ed $\hat{\mathbf{e}}'_3$ sono costanti. Questi due coni rotolano senza strisciare l'uno sull'altro poiché i punti del corpo che si trovano sull'asse passante per O e parallelo ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ hanno tutti velocità nulla (è l'asse istantaneo di rotazione e O ha velocità nulla). Tale asse corrisponde alla retta istantanea di contatto tra i due coni e ha velocità istantanea nulla sia nel sistema di riferimento inerziale che nel riferimento solidale: ciò è dovuto al fatto che la derivata temporale di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ fatta nei due riferimenti è la stessa.

Dimostriamo adesso che il moto di rotazione è uniforme.

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega' \, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O} + \omega'' \, \hat{\mathbf{e}}'_3$$

con $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O}$ versore di $\vec{\mathbf{M}}_O$, per cui

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}'_3\Big|_{\Sigma} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_3 = \omega' \, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O} \times \hat{\mathbf{e}}'_3.$$

Analogamente si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O}\Big|_{\Sigma'} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{e}}'_3 = \omega'' \, \hat{\mathbf{e}}'_3 \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{M}_O}.$$

□

CASO 3: $I_1 > I_2 > I_3$

Le equazioni di Eulero (5.27) ammettono gli integrali primi

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_O|^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2, \\ 2E = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2, \end{cases}$$

con $\mathbf{M}_O = (M_1, M_2, M_3)^T$.

Definizione 14. *Chiamiamo* **rotazioni stazionarie** *le soluzioni $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ costanti delle equazioni di Eulero (5.27).*

Ricordiamo che $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è costante nel riferimento Σ' se e solo se è costante in Σ.

Dalla (5.27) si vede che le rotazioni stazionarie sono quelle per cui

$$\mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}} \parallel \vec{\boldsymbol{\omega}},$$

cioè sono gli autovettori di $\mathfrak{I}_O$. Quindi se il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è una rotazione stazionaria allora è necessariamente parallelo ad uno degli $\hat{\mathbf{e}}'_j$. Si parla dunque di rotazioni stazionarie attorno agli assi $O\hat{\mathbf{e}}'_1$, $O\hat{\mathbf{e}}'_2$, $O\hat{\mathbf{e}}'_3$.

Dalla relazione $\vec{\mathbf{M}}_O = \mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si ottiene che anche $\vec{\mathbf{M}}_O$ deve essere parallelo ad $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Quindi in questo caso $\vec{\mathbf{M}}_O$ è costante anche in Σ'.

Per studiare la stabilità delle rotazioni stazionarie e capire la geometria delle soluzioni di (5.27) consideriamo le equazioni

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{M}}_O\Big|_{\Sigma'} = \vec{\mathbf{M}}_O \times \vec{\boldsymbol{\omega}}, \tag{5.31}$$

che hanno gli integrali primi

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_O|^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2, \\ 2E = \dfrac{M_1^2}{I_1} + \dfrac{M_2^2}{I_2} + \dfrac{M_2^2}{I_2}. \end{cases} \tag{5.32}$$

Per valori fissati di $|\mathbf{M}_O|$, E le (5.32) rappresentano l'intersezione di una sfera di raggio $|\mathbf{M}_O|$ con un ellissoide di semiassi $\sqrt{2EI_j}$, $j = 1, 2, 3$, e individuiamo le traiettorie possibili per le coordinate (M_1, M_2, M_3) del momento angolare nella base $\mathcal{B}'$.

Fissiamo un valore E per l'energia e consideriamo l'insieme delle coordinate (M_1, M_2, M_3) che soddisfano (5.32). Il fatto che questo insieme sia non vuoto è garantito dalle relazioni

$$2EI_3 \leq |\mathbf{M}_O|^2 \leq 2EI_1.$$

Descriviamo l'insieme delle traiettorie delle soluzioni di (5.28) nei vari casi. Ci sono cinque possibilità: 1) $2EI_3 = |\mathbf{M}_O|$; 2) $2EI_3 < |\mathbf{M}_O| < 2EI_2$; 3) $|\mathbf{M}_O| = 2EI_2$; 4) $2EI_2 < |\mathbf{M}_O| < 2EI_1$; 5) $\||\mathbf{M}_O| = 2EI_1$.

Nel caso 1) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{\mathbf{e}}_3'$, che corrispondono alle rotazioni stazionarie con $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ parallelo a $\hat{\mathbf{e}}_3'$. Nel caso 2) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_3'$. Nel caso 3) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{\mathbf{e}}_2'$ e quattro curve che li congiungono, che corrispondono alle separatrici stabili e instabili delle equazioni (5.31) ristrette all'ellissoide di energia costante. Nel caso 4) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_1'$. Nel caso 5) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse $O\hat{\mathbf{e}}_1'$.

... inserisci figura ...

Usando la relazione $\vec{\mathbf{M}}_O = \mathfrak{I}_O\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si conclude che le rotazioni stazionarie attorno a $O\hat{\mathbf{e}}_1'$, $O\hat{\mathbf{e}}_3'$ sono stabili, mentre quelle attorno a $O\hat{\mathbf{e}}_2'$ sono instabili.

L'instabilità delle rotazioni stazionarie attorno all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_2'$ si può anche ottenere dal calcolo diretto degli esponenti di Lyapounov del sistema

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 &= \alpha_1\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 &= \alpha_2\omega_3\omega_1 \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha_3\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

con

$$\alpha_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} > 0, \qquad \alpha_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} < 0, \qquad \alpha_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} > 0.$$

Posto $\mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}) = (\alpha_1\omega_2\omega_3, \alpha_2\omega_3\omega_1, \alpha_3\omega_1\omega_2)^T$ si ottiene infatti che

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui gli esponenti di Lyapounov sono

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha_1\alpha_3}$$

ed uno di essi è > 0.

5.8.1 Fase geometrica nel moto del corpo rigido

Consideriamo adesso un moto periodico attorno ad una rotazione stazionaria stabile, per esempio attorno a $O\hat{\mathbf{e}}_1$. Vogliamo calcolare l'angolo $\Delta\theta$, che ci dice di quanto è ruotato il corpo rigido dopo un periodo di $\mathbf{M}_O$.

Riportiamo qui una formula dimostrata da Montgomery in [15]:

$$\Delta\theta = 2\frac{ET}{|\mathbf{M}_O|} - \Omega \tag{5.33}$$

in cui T è il periodo del moto ed Ω è l'angolo solido tracciato sulla sfera unitaria centrata in O e solidale al corpo dalla direzione del momento angolare $\vec{\mathbf{M}}_O$.

In [14] si trova una dimostrazione della formula (5.33) utilizzando il teorema di Gauss-Bonnet e la Proposizione 25.