

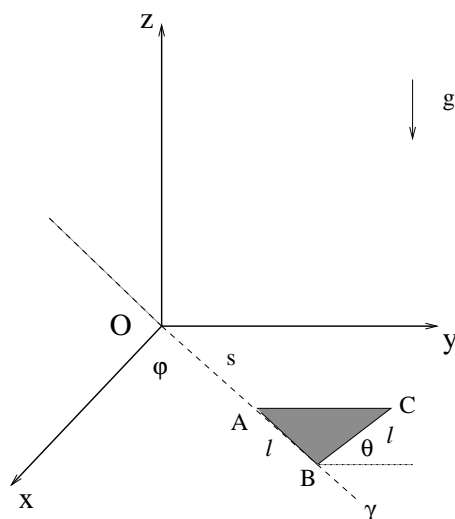
Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

23 Settembre 2014

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Sia dato un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$. Una lamina omogenea di massa m , a forma di triangolo rettangolo di vertici ABC e cateti lunghi l , è mobile in tale sistema di riferimento. Il cateto AB della lamina è vincolato a muoversi lungo una retta γ appartenente al piano Oxy , la quale è libera di ruotare attorno all'asse Oz (vedi figura). Si prendano come parametri lagrangiani la distanza s del punto A dall'origine, l'angolo φ che la retta γ forma con l'asse Ox e l'angolo θ che il cateto BC forma con la sua proiezione sul piano Oxy . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione g . Scrivere la lagrangiana del sistema.



Secondo Esercizio

Si consideri un piano verticale Oxz , con asse z verticale ascendente ed una curva di equazione $x = e^{-z^2}$. Un punto P di massa unitaria è vincolato a muoversi sulla superficie ottenuta ruotando la curva di equazione $x = e^{-z^2}$ attorno all'asse verticale. Sul punto agisce una forza elastica di richiamo verso l'origine e costante elastica unitaria. Si trascuri la forza di gravità.

- Scelta un'opportuna parametrizzazione per la superficie di rotazione si scriva la lagrangiana per il punto materiale.
- Si utilizzi il metodo di Routh per scrivere la lagrangiana ridotta.
- Studiare i moti nel sistema ridotto e in quello originario.

Terzo Esercizio

Completare le relazioni

$$P_k = \sum_{j=1}^k (p_j^2 + q_j^2), \quad k = 1 \dots n$$

ad una trasformazione canonica

$$\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n \ni (p, q) \mapsto (P, Q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Scrivere inoltre nelle variabili (P, Q) il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^n p_j^2 + V(q), \quad V(q) = \sum_{j=1}^n q_j^2 + \arcsin\left(\frac{q_1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}\right).$$