

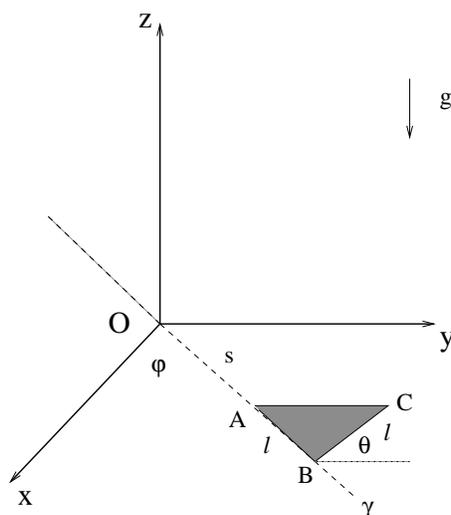
## Compito di Istituzioni di Fisica Matematica

23 Settembre 2014

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

### Primo Esercizio

Sia dato un sistema di riferimento cartesiano  $Oxyz$ . Una lamina omogenea di massa  $m$ , a forma di triangolo rettangolo di vertici  $ABC$  e cateti lunghi  $l$ , è mobile in tale sistema di riferimento. Il cateto  $AB$  della lamina è vincolato a muoversi lungo una retta  $\gamma$  appartenente al piano  $Oxy$ , la quale è libera di ruotare attorno all'asse  $Oz$  (vedi figura). Si prendano come parametri lagrangiani la distanza  $s$  del punto  $A$  dall'origine, l'angolo  $\varphi$  che la retta  $\gamma$  forma con l'asse  $Ox$  e l'angolo  $\theta$  che il cateto  $BC$  forma con la sua proiezione sul piano  $Oxy$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $g$ . Scrivere la lagrangiana del sistema.



### Secondo Esercizio

Si consideri un piano verticale  $Oxz$ , con asse  $z$  verticale ascendente ed una curva di equazione  $x = e^{-z^2}$ . Un punto  $P$  di massa unitaria è vincolato a muoversi sulla superficie ottenuta ruotando la curva di equazione  $x = e^{-z^2}$  attorno all'asse verticale. Sul punto agisce una forza elastica di richiamo verso l'origine e costante elastica unitaria. Si trascuri la forza di gravità.

- Scelta un'opportuna parametrizzazione per la superficie di rotazione si scriva la lagrangiana per il punto materiale.
- Si utilizzi il metodo di Routh per scrivere la lagrangiana ridotta.
- Studiare i moti nel sistema ridotto e in quello originario.

### Terzo Esercizio

Completare le relazioni

$$P_k = \sum_{j=1}^k (p_j^2 + q_j^2), \quad k = 1 \dots n$$

ad una trasformazione canonica

$$\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n \ni (p, q) \mapsto (P, Q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Scrivere inoltre nelle variabili  $(P, Q)$  il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^n p_j^2 + V(q), \quad V(q) = \sum_{j=1}^n q_j^2 + \arcsin\left(\frac{q_1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}}\right).$$