

Secondo appello di Istituzioni di Fisica Matematica

18 Febbraio 2014

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Denotiamo con $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ i versori degli assi di Σ . Un'ellisse (piena) omogenea, di massa m e semiassi $a > b > 0$ è libera di ruotare mantenendo il suo baricentro B fisso nell'origine O .

- a) Determinare i momenti principali di inerzia dell'ellisse rispetto al baricentro B (*Suggerimento*: usare coordinate polari ellittiche).

Assumiamo che l'ellisse si muova con velocità angolare $\vec{\omega}$ costante diretta lungo Oz : $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$, $\omega \in \mathbb{R}$. Inoltre, detta $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ una base principale di inerzia per l'ellisse, assumiamo che all'istante iniziale $t = 0$ si abbia

$$\begin{aligned}\hat{e}'_1 &= \hat{e}_1, \\ \hat{e}'_2 &= \cos \alpha \hat{e}_2 + \sin \alpha \hat{e}_3, \\ \hat{e}'_3 &= -\sin \alpha \hat{e}_2 + \cos \alpha \hat{e}_3,\end{aligned}$$

con $\alpha \in (0, \pi/2)$.

- b) Calcolare il momento delle forze \vec{N}_B , rispetto al polo B , necessario a mantenere il moto prestabilito dell'ellisse.

Secondo Esercizio

In un piano verticale Oxy , con asse Oy verticale ascendente, si consideri il sistema meccanico costituito da

1. un'asta omogenea OA , di massa m e lunghezza 2ℓ , libera di ruotare nel piano mantenendo il suo estremo O fisso nell'origine del sistema di riferimento;
2. una lamina quadrata omogenea $BCDE$, di massa m ed area ℓ^2 , il cui lato BC può scorrere sull'asse Oy ;

Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro G dell'asta con il vertice B della lamina. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g . Inoltre, il piano Oxy viene messo in rotazione attorno all'asse Oy con velocità angolare costante

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_2, \quad \omega = \sqrt{6k/m}.$$

Utilizzando l'ordinata s del punto B sull'asse Oy e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale

- a) scrivere la lagrangiana del sistema;
- b) determinare gli equilibri relativi del sistema e la loro stabilità in funzione del parametro adimensionale

$$J = \frac{mg}{k\ell}.$$

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \quad p \in \mathbb{R}^+, q \in (-1, 1) \quad (1)$$

con

$$H(p, q) = h(p^2 + q^2), \quad \mathbb{R} \ni z \mapsto h(z) = \sum_{j=0}^N z^j, \quad N \in \mathbb{N}.$$

a) Si trovi una trasformazione canonica

$$\mathbb{R}^+ \times (-1, 1) \ni (p, q) \xrightarrow{\Psi} (P, Q) \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi/4, \pi/4)$$

che trasformi (1) in un sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton $K = K(P)$ indipendente da Q .

b) Trovare la soluzione del sistema (1) con condizioni iniziali $p_0 = \sqrt{3}/2$, $q_0 = 1/2$.