Secondo compitino di Istituzioni di Fisica Matematica
13 Gennaio 2014
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Un sistema meccanico, mobile in un piano verticale Oxy con asse Oy verticale ascendente, è così composto (vedi figura):

i) un disco omogeneo $\mathcal{D}_1$ di massa $2m$ e raggio $2r$ che rotola senza strisciare sull'asse delle ascisse (sia A il punto di contatto);

ii) un disco omogeneo $\mathcal{D}_2$ di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su $\mathcal{D}_1$ (sia C il punto di contatto tra i due dischi).

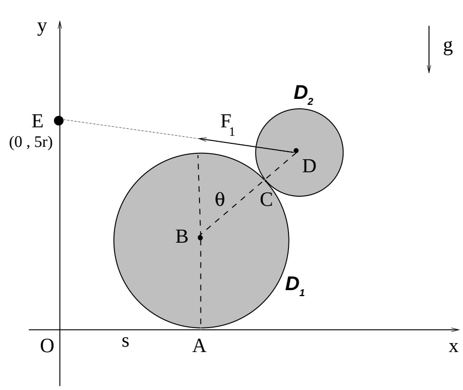
Sull'intero sistema agisce la forza di gravità, mentre sul disco $\mathcal{D}_2$ agisce una forza elastica applicata nel suo baricentro D, avente la forma $\vec{F}_1 = -k\,(D - E)$, dove $k > 0$ ed E è il punto di coordinate $(x, y) = (0, 5r)$.

Si utilizzino come parametri lagrangiani l'ascissa $s \in \mathbb{R}$ del punto A e l'angolo $\theta \in S^1$ tra $(C - B)$ e la direzione verticale ascendente, crescente in verso orario.

a) Scrivere la lagrangiana del sistema.

b) Studiare gli equilibri del sistema e la loro stabilità al variare del parametro positivo $\alpha = mg/(kr)$ nei casi in cui la matrice hessiana dell'energia potenziale non è degenere.

c) Supposto $\alpha = 3$, si scrivano le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



Secondo Esercizio

Si consideri il problema dei tre corpi ristretto circolare piano in cui i corpi, assunti puntiformi, rappresentano il Sole, la Terra e un asteroide. Si suppone che il moto del Sole e della Terra sia circolare, attorno al loro comune centro di massa O, e che non sia affetto dalla presenza dell'asteroide. L'asteroide si muove nel piano definito dalle orbite del Sole e della Terra, in cui fissiamo un riferimento Oxy.

Per semplicità di notazione scegliamo le unità di misura di lunghezza, tempo e massa in modo che

1. la massa del Sole e della Terra siano rispettivamente $1-\mu$, μ, con $\mu \approx 1/300000$;
2. la distanza tra Sole e Terra sia 1;
3. il periodo della loro orbita circolare sia 1.

In questo modo il valore della costante di gravitazione universale G è $4\pi^2$.

i) Scrivere la hamiltoniana H per il moto del terzo corpo usando le coordinate x, y ed i relativi momenti p_x, p_y;

ii) completare la relazione

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R_t^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad R_t = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{bmatrix}$$

ad una trasformazione canonica (dipendente da t)

$$(p_x, p_y, x, y, t) \xrightarrow{\Psi} (p_\xi, p_\eta, \xi, \eta, t)$$

e scrivere la nuova hamiltoniana K del problema (*conviene assumere che per $t = 0$ il Sole e la Terra si trovano sull'asse Ox*);

iii) Scrivere la lagrangiana del problema usando le coordinate ξ, η nel riferimento rotante $O\xi\eta$. Usare infine la trasformata di Legendre per ritrovare la hamiltoniana K del punto ii).