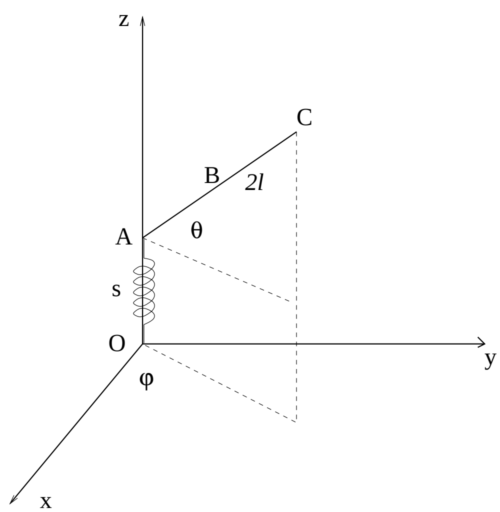
Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
8 Luglio 2013

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ ha un estremo A vincolato a scorrere sull'asse Oz; tale estremo è anche collegato all'origine O da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sull'asta agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.

Si usino come variabili la coordinata s del punto A sull'asse Oz e gli angoli $\varphi \in S^1$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ che individuano la direzione dell'asta (vedi figura).

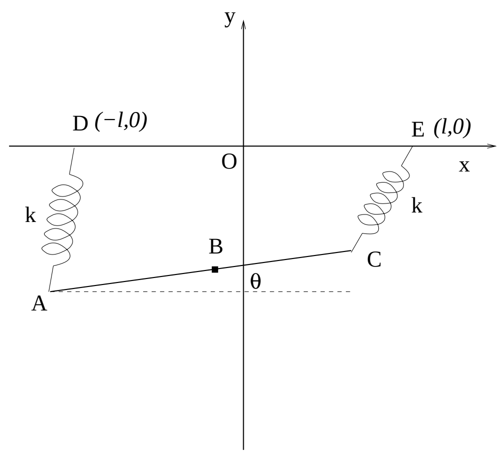


a) Determinare l'asse istantaneo di rotazione dell'asta negli istanti in cui la sua velocità angolare $\vec{\omega}$ non sia nulla.

b) Scrivere le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali della dinamica.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy, con l'asse Oy verticale ascendente. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ può muoversi liberamente in questo piano. L'estremo A dell'asta è collegato al punto D di coordinate $(x, y) = (-\ell, 0)$ da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla; l'altro estremo C dell'asta è collegato al punto E di coordinate $(x, y) = (\ell, 0)$ da una molla uguale alla precedente. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Si utilizzino come variabili lagrangiane le coordinate (x, y) del baricentro B dell'asta e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione orizzontale (vedi figura).



a) Scrivere la lagrangiana del sistema.

b) Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

c) Calcolare le frequenze proprie ed i modi normali di oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1 + q_2)$$

in cui $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ e $V \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

a) Trovare una trasformazione canonica a nuove variabili (P_1, P_2, Q_1, Q_2) tale che Q_2 sia una variabile ciclica nella nuova hamiltoniana.

b) Scrivere l'equazione di Hamilton nelle nuove variabili e ridurre tale equazione ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie con il metodo di separazione delle variabili.

Soluzioni

Primo Esercizio

a) L'asse istantaneo di rotazione è individuato dalla velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ e da un punto P_0 dell'asse. Poniamo

$$\vec{\mathbf{e}}_r = \cos\phi\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\phi\vec{\mathbf{e}}_2, \quad \vec{\mathbf{e}}_\phi = -\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\phi\vec{\mathbf{e}}_2,$$

Si ha

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\phi + \dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}_3, \qquad \vec{\mathbf{v}}_A = \dot{s}\vec{\mathbf{e}}_3.$$

Inoltre

$$P_0 - A = \frac{1}{\omega^2}\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}_A = -\frac{\dot{\theta}\dot{s}}{\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2}(-\sin\phi\vec{\mathbf{e}}_2 - \cos\phi\vec{\mathbf{e}}_1) = \frac{\dot{\theta}\dot{s}}{\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2}\vec{\mathbf{e}}_r$$

per cui

$$P_0 - O = (P_0 - A) + (A - O) = s\vec{\mathbf{e}}_3 + \frac{\dot{\theta}\dot{s}}{\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2}\vec{\mathbf{e}}_r.$$

b) La prima equazione cardinale si scrive

$$m\vec{\mathbf{a}}_B = -mg\vec{\mathbf{e}}_3 - ks\vec{\mathbf{e}}_3 + \vec{\mathbf{\Phi}}_A$$

in cui $\mathbf{\Phi}_A$ è la reazione vincolare in A, con $\vec{\mathbf{\Phi}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_3 = 0$. Proiettando tale equazione lungo $\vec{\mathbf{e}}_3$ si ottiene

$$m(\ddot{s} - \ell\sin\theta\dot{\theta}^2 + \ell\cos\theta\ddot{\theta}) = -mg - ks$$

La seconda equazione cardinale rispetto al polo A si scrive

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{M}}_A\right|_\Sigma = \vec{\mathbf{N}}_A - \vec{\mathbf{v}}_A \times m\vec{\mathbf{v}}_B,$$

in cui B è il baricentro dell'asta. Posto

$$\vec{\boldsymbol{\eta}}_1 = \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_r + \sin\theta\vec{\mathbf{e}}_3, \quad \vec{\boldsymbol{\eta}}_2 = -\sin\theta\vec{\mathbf{e}}_r + \cos\theta\vec{\mathbf{e}}_3,$$

l'insieme $\{\vec{\mathbf{e}}_\phi, \vec{\boldsymbol{\eta}}_2, \vec{\boldsymbol{\eta}}_1\}$ forma una base principale di inerzia per l'asta. Abbiamo inoltre

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\phi + \dot{\phi}\cos\theta\vec{\boldsymbol{\eta}}_2 + \dot{\phi}\sin\theta\vec{\boldsymbol{\eta}}_1,$$

quindi

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{M}}_A &= m(B - A) \times \vec{\mathbf{v}}_A + \mathcal{I}_A\vec{\boldsymbol{\omega}} = -m\ell\cos\theta\dot{s}\vec{\mathbf{e}}_\phi + \frac{4}{3}m\ell^2(-\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\phi + \dot{\phi}\cos\theta\vec{\boldsymbol{\eta}}_2) \\
\vec{\mathbf{N}}_A &= (B - A) \times (-mg\vec{\mathbf{e}}_3) = mg\ell\cos\theta\vec{\mathbf{e}}_\phi \\
-\vec{\mathbf{v}}_A \times m\vec{\mathbf{v}}_B &= m\ell\dot{s}(\sin\theta\dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\phi + \cos\theta\dot{\phi}\vec{\mathbf{e}}_r)
\end{aligned}$$

Le proiezioni della seconda equazione cardinale lungo $\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\phi, \vec{\mathbf{e}}_3$ danno rispettivamente

$$\begin{aligned}
-\sin\theta(\ddot{\phi}\cos\theta - 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta) &= 0 \\
\frac{4}{3}\ell(\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta) + \cos\theta(g + \ddot{s}) &= 0 \\
\cos\theta(\ddot{\phi}\cos\theta - 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta) &= 0.
\end{aligned}$$

Le equazioni del moto sono dunque

$$\begin{aligned}
m(\ddot{s} - \ell\sin\theta\dot{\theta}^2 + \ell\cos\theta\ddot{\theta}) + mg + ks &= 0 \\
\ddot{\phi}\cos\theta - 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta &= 0 \\
\frac{4}{3}\ell(\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta) + \cos\theta(g + \ddot{s}) &= 0.
\end{aligned}$$

Secondo Esercizio

a) La lagrangiana è $L = T - V$ dove T è l'energia cinetica,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2,$$

e V è l'energia potenziale,

$$V = mgy + k(x^2 + y^2 - 2\ell^2\cos\theta).$$

b) Le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= 2kx = 0 \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= mg + 2ky = 0 \\
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= 2k\ell^2\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

cioè $\boldsymbol{q}_1 := (x_1, y_1, \theta_1) = (0, -\frac{mg}{2k}, 0)$ e $\boldsymbol{q}_2 := (x_2, y_2, \theta_2) = (0, -\frac{mg}{2k}, \pi)$.

La matrice hessiana V'' di V calcolata nei due punti è

$$V''(\boldsymbol{q}_1) = 2k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ell^2 \end{pmatrix}, \qquad V''(\boldsymbol{q}_2) = 2k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell^2 \end{pmatrix},$$

quindi $\boldsymbol{q}_1$ è stabile, $\boldsymbol{q}_2$ è instabile.

c) Scrivo l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno a $\boldsymbol{q}_1$:

$$|V''(\boldsymbol{q}_1) - \lambda A(\boldsymbol{q}_1)| = 0,$$

con soluzioni $\lambda_j, j = 1, 2, 3$. Le frequenze proprie sono $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$, dunque

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

I modi normali si possono scegliere della forma $c_j \cos(\omega_j t + \phi_j)\boldsymbol{u}_j$, con $c_j > 0$, $\phi_j \in S^1$, ed $\boldsymbol{u}_j$ i vettori della base canonica:

$$\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{u}_3 = (0, 0, 1)^T.$$

Terzo Esercizio

a) Considero la trasformazione di coordinate $(q_1, q_2) \to (Q_1, Q_2)$ definita dalle relazioni

$$Q_1 = q_1 + q_2, \qquad Q_2 = q_2$$

e la completo ad una trasformazione canonica tramite una funzione generatrice della forma $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P})$, con $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$, $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2)$. Ottengo le relazioni

$$P_1 = p_1, \qquad P_2 = p_2 - p_1.$$

La hamiltoniana H nelle variabili $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2)$ diventa

$$K(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = \frac{1}{2}(P_1^2 + (P_1 + P_2)^2) + V(Q_1)$$

e Q_2 è una variabile ciclica, a cui corrisponde l'integrale primo P_2.
b) L'equazione di Hamilton-Jacobi in queste coordinate si scrive

$$\frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial Q_1} + \frac{\partial W}{\partial Q_2}\Big)^2\Big] + V(Q_1) = e(\boldsymbol{\alpha}),$$

con $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Assumo che $\alpha_2 = P_2$, cioè che la seconda costante di integrazione corrisponda al valore costante del momento coniugato alla variabile ciclica e pongo $e(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1$. Cerco una funzione caratteristica della forma $W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}) = W_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}) + W_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha})$ ed ottengo per separazione delle variabili il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1} + \alpha_2\Big)^2\Big] + V(Q_1) &= \alpha_1, \\ \frac{\partial W_2}{\partial Q_2} &= \alpha_2. \end{aligned}$$