I appello di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Gennaio 2013

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Un punto materiale $P \in \mathbb{E}^3$ di massa unitaria è soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(r) = \alpha \ln r - \frac{1}{r^4} \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

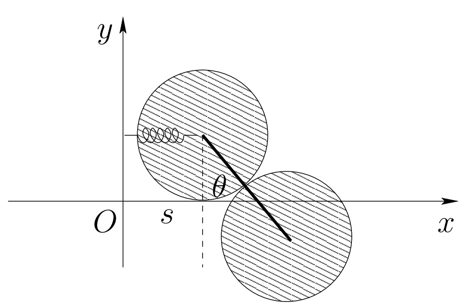
con $r = |P - O|$, dove $O \in \mathbb{E}^3$ è il centro di forza.

a) Discutere qualitativamente il moto al variare del parametro reale α e del modulo del momento angolare.

b) Discutere l'esistenza di orbite circolari e, nei casi in cui esistono, determinarne il periodo.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da 2 dischi omogenei $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ di massa M e raggio R vincolati da un'asta omogenea di massa M e lunghezza $2R$, i cui estremi sono incernierati nei due baricentri dei dischi (vedi figura).



I due dischi rotolano senza strisciare l'uno sull'altro ed il disco $\mathcal{D}_1$ rotola senza strisciare sull'asse Ox. Una molla di costante elastica k collega il baricentro B_1 del disco $\mathcal{D}_1$ all'asse Oy, mantenendosi sempre orizzontale.

Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Usando come coordinate l'ascissa s di B_1 e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale,

i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) studiare gli equilibri e la loro stabilità;

iii) scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Terzo Esercizio

Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dalla funzione di Hamilton

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2\, q_1} \right)^2 + p_2^2 + (q_1 + q_2)^2 \ .$$

a) Estendere la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = q_1^2 \qquad Q_2 = q_1 + q_2$$

ad una trasformazione canonica $\boldsymbol{\Psi}_1$ omogenea nei nuovi momenti $\boldsymbol{P}$, in modo che la hamiltoniana $K_1 = H \circ \boldsymbol{\Psi}_1^{-1}$ non dipenda da Q_1.

b) Usare il metodo di Jacobi per trovare una trasformazione canonica $\boldsymbol{\Psi}_2 : (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ tale che $K_2 = K_1 \circ \boldsymbol{\Psi}_2^{-1}$ non dipenda dalle nuove coordinate $\boldsymbol{\xi}$.